Lineare Algebra

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Winfried Schirotzek
(Wintersemester 2006/07)

Herausgegeben von

Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky
www.ages-skripte.org

Stand: 24. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir vor allem den Studienanfängern eine wichtige Botschaft mitgeben: Dieses Skript ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes im weiteren Studienverlauf für Probleme sorgen.

Wir weisen darauf hin, weil das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Nochmals möchten wir uns an die Studienanfänger wenden: Hoffentlich begreift Ihr genauso wie wir die ersten Semester Eures Studiums als Chance, Euren persönlichen Lernfluss zu finden. Das Studium verlangt in dieser Beziehung nach eigener Erfahrung wesentlich mehr von einem Studenten ab als eine Schule. Umso wichtiger ist es, herauszufinden, wie man möglichst viel Inhalt in möglichst kurzer Zeit aufnehmen, systematisieren und abspeichern kann.

Eines ist sicher: Das bloße Durchlesen des Skriptes reicht meistens nicht. Zur Aufnahme des Stoffes und für einen ersten Überblick reicht in den meisten Fällen das klassische Mitschreiben in der Vorlesung, bei wenigen auch das aufmerksame Zuhören. Zum Systematisieren ist der Besuch der Übungen und das Bearbeiten der Übungsaufgaben unerlässlich (auch wenn einige Erstsemester das immer wieder mal anders sehen, aber das gibt sich). Eine andere gute Idee ist oft auch die Bildung von eigenen kleinen Lehrgruppen von drei bis vier Personen, auch wenn man da aufpassen muss, sich nicht abzulenken.

Bevor wir abschweifen, fassen wir noch kurz zusammen, wofür dieses Skript wirklich geeignet ist: einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
`www.ages-skripte.org`

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

0 Einführung

0.1 Grundbegriffe

Menge

- Erklärung (keine Definition): Zusammenfassung von Elementen
- $x \in M$: x ist Element der Menge M
- $x \notin M$: x ist kein Element der Menge M

Standardmengen

- $\varnothing$ - leere Menge
- $\mathbb{N}$ - natürliche Zahlen (ohne Null)
- $\mathbb{Z}$ - ganze Zahlen
- $\mathbb{Q}$ - rationale Zahlen ($\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$)
- $\mathbb{R}$ - reelle Zahlen (z.B. π, e)
- Menge aller x: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- Menge aller x mit der Eigenschaft $P(x)$: $\{x|P(x)\}$ oder $\{x|P(x)\}$

Beispiel 0.1

$M = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge |z| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Definition 0.1

Sind A,B $\neq \varnothing$, so heißt $A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge x \in B\}$ kartesisches Produkt. Hierbei ist (a, b) ein geordnetes Paar mit den Elementen a und b. Man definiert $(a, b) = (a', b') :\Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$.
Statt $A \times A$ schreibt man kürzer A^2. Insbesondere ist $\mathbb{R}^2$ die Menge alle geordneten Paare reeller Zahlen.

Relationen

- $p \Rightarrow q$ - Aus p folgt q (Implikation). $p \Leftrightarrow q$ - q gilt genau dann, wenn p gilt. (Äquivalenz)
- Ein Doppelpunkt signalisiert, dass diese Relation per Definition gilt.
- $p :\Leftrightarrow q$ - q gilt definitionsgemäß genau dann, wenn p gilt.

Zur Verkürzung von logischen Ausdrücken verwendet man sogenannte Quantoren:
$\forall$ heißt „für alle“, $\exists$ heißt „(es) existiert (ein)“.

Definition 0.2

Seien D und E beliebige nicht-leere Mengen. Eine Teilmenge $f \subset D \times E$ heißt Funktion (Abbildung, Operator), wenn gilt:

1. $\forall x \in D : \exists y \in E : (x, y) \in f$ (Definiertheit)
2. $(x, y_1) \in f \land (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$ (Rechtseindeutigkeit)

Beispiel 0.2

$f := \left\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : y = x^2\right\}$
$\forall x \in [-1, 1] : y = x^2 \in \mathbb{R} \land (x, y_1) \in f \land (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = x^2 = y_2 \Rightarrow f$ ist eine Funktion.

Beispiel 0.3

$g := \left\{x, y \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : y^2 = x\right\}$
$(-1)^2 = 1 = 1^2 \Rightarrow (1, -1) \in g \land (1, 1) \in g \land -1 \neq 1 \Rightarrow g$ ist keine Funktion, da die Rechtseindeutigkeit verletzt ist.

Definition 0.3

Ist $f \subset (D \times E)$ eine Funktion, dann heißt

- D Definitionsbereich von f
- $W = W(f) := \{y \in E : \exists x \in D : (x, y) \in f\}$ Wertevorrat von f

Funktionen beschreibt man mit der folgenden Schreibweise:

- $f : D \to E$ - f bildet D nach E ab, d.h. $f \subset D \times E$
- $f : x \mapsto y, x \in D$ - f ordnet dem Element $x \in D$ das Element y zu, d.h. $(x, y) \in f$

Definition 0.4

Ist $f : x \mapsto y$ eine Funktion, so heißt:

- x unabhängige Variable und der Wert von x Urbild
- y abhängige Variable und der Wert von y Bild oder Funktionswert

Für die Schreibweise $f : D \to E$ nennt man $\text{graph}(f) = \{(x, y) \in f\}$ den Graphen von f.

Gemäß der Definition ist $\text{graph}(f) = f$.

Definition 0.5

Eine Funktion $f : D \to E$ heißt:

- injektiv (eineindeutig), wenn gilt: $[x, x' \in D \land x \neq x'] \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$
- surjektiv, wenn gilt: $W(f) = E$
- bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv gilt

Bemerkung

Sei $y = f(x)$, wobei $y \in E$ gegeben und $x \in D$ gesucht sei. Die Funktion $f : D \to E$ ist genau dann

– injektiv, wenn $y = f(x)$ für jedes $y \in E$ höchstens eine Lösung $x \in D$ hat

– surjektiv, wenn $y = f(x)$ für jedes $y \in E$ mindestens eine Lösung $x \in D$ hat

– bijektiv, wenn $y = f(x)$ für jedes $y \in E$ genau eine Lösung $x \in D$ hat

Definition 0.6

Ist $f : D \to E$ injektiv, so ist durch $f^{-1}(y) = x :\Leftrightarrow f(x) = y$ die inverse Funktion (Umkehrfunktion) $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ definiert.

Beispiel 0.4

1. $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (d.h. $y = f(x) = x^2$) $\Rightarrow f_1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
2. $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \Rightarrow f_2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
3. $f_3 : [0,1] \to [0,1], x \mapsto x^2 \Rightarrow f_3$ ist bijektiv.

Im folgenden sei die Menge $A_N = \{1, \ldots, N\}$ gegeben. Wir betrachten geordnete N-tupel aus den Elementen von A_N, wobei jedes Element genau einmal vorkommt, z.B. $\{1, 2, \ldots, N\}$, $\{1, 3, 5, 4, 2, \ldots, N\}$, $\{N, \ldots, 2, 1\}$. Für N-tupel wird die Gleichheit definiert durch:

$$(a_1, \ldots, a_N) = (b_1, \ldots, b_N) :\Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_N = b_N$$

Sei $(n_1, \ldots, n_N)$ ein beliebiges N-tupel aus A_N. Dann ist durch $k \mapsto n_k$ mit $k = 1, \ldots, N$ eine bijektive Abbildung $P_N : A_N \to A_N$ gegeben.

Definition 0.7

Eine bijektive Abbildung $P_N : A_N \to A_N$ heißt Permutation der Zahlen $1, \ldots, N$.

Ist $M_N := \{m_1, \ldots, m_nN\}$ eine beliebige N-elementige Menge, so gehört zu jeder Permutation $P_N : k \mapsto n_k$ eine Anordnung der Elemente M_N: $(m_{n_1}, \ldots, m_{n_N})$. Umgekehrt gehört zu jeder solchen Anordnung eine Permutation. Die Anzahl der Anordnungen der N-elementigen Menge M_N, wobei jedes Element genau einmal vorkommt, ist also gleich der Anzahl der Permutationen P_N der Zahlen $1, \ldots, N$.

Satz 0.8

Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau $N!$ Permutationen der Zahlen $1, \ldots, N$.

Dabei ist $N! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N = \prod_{i=1}^{N} i$ die Fakultät von n.

Beweis durch vollständige Induktion

Sei $Z(N)$ die Anzahl der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, N$. Beh.: $Z(N) = N!\ \forall N \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: Es ist $Z(1) = 1 = 1!$

Induktionsannahme: $Z(N) = N!$

Induktionsschritt: Jede Permutation P_{N+1} ist gegeben durch die Angabe von (1.) $P_{N+1}(N+1)$ und (2.) einer bijektiven Abbildung $A_N \to A_{N+1} \setminus \{P_{N+1}(N+1)\}$. Für (1.) gibt es $N+1$ Möglichkeiten, für (2.) gemäß der Induktionsannahme $N!$ Möglichkeiten. Insgesamt ist also $Z(N+1) = (N+1) \cdot Z(N) = (N+1) \cdot N! = (N+1)!$

■

Beispiel 0.5

Man soll 10 Bücher in ein Regal einordnen. Für die Anordnung dieser 10 Elemente gibt es gemäß obigem Satz $10! = 3628800$ Möglichkeiten.

1 Die komplexen Zahlen

1.1 Definition und Darstellung

Mangel der Menge $\mathbb{R}$: „Einfache“ Gleichungen der Form
$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \qquad (*)}$
haben häufig keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1

$x^2 + 1 = 0$, denn $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$

Definition 1.1

Auf $\mathbb{R}^2$ seien die Abbildungen

- $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (Addition)
- $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (Multiplikation)

definiert durch die folgenden Vorschriften:

- $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \qquad (1)$
- $(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b) \qquad (2)$

Dann heißt das Tripel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ Menge der komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$).

Die Abbildung $(a, 0) \mapsto a$ von $\mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ ist injektiv. Für alle $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt:

- $(a, 0) \neq (a', 0) \Rightarrow a \neq a'$
- $(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$
- $(a, 0) \cdot (a', 0) = (a \cdot a', 0)$

Das heißt, das Rechnen in $\mathbb{R} \times \{0\}$ entspricht dem Rechnen in $\mathbb{R}$. Also ist $(a, 0) = a$ und $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist (als Teilmenge von $\mathbb{C}$) mit $\mathbb{R}$ identifiziert. Daraus folgt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Für alle $(a, b) \in \mathbb{C}$ gilt:

- $b(0, 1) = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$
- $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) \qquad (3)$

Definition 1.2

$i := (0, 1)$ heißt imaginäre Einheit.
Daraus folgt die arithmetische Darstellung der komplexen Zahlen: $(a, b) = a + ib \qquad (4)$.
$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \qquad (5)$

Satz 1.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung der Form $(*)$ (sogar mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \dots, n$) hat mindestens eine Lösung.

Definition 1.4

Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$, dann heißt

- $\operatorname{Re} z := a$ Realteil von z,
- $\operatorname{Im} z := b$ Imaginärteil von z,
- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag von z und
- $z^* := a - ib$ (auch $\overline{z}$) die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Wir denken φ als Winkel im Bogenmaß. Eine Drehung des „Zeigers“ von (0,0) nach (1,0) um φ (in positiver mathematischer Drehrichtung, also entgegen des Uhrzeigersinnes) führt zum Punkt:

$$P := (\cos \varphi, \sin \varphi) \qquad (6)$$

Hiermit sind die Funktionen cos und sin definiert. (6) in komplexer Form ergibt:

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi \, (|z| = 1) \qquad (6a)$$

Nun sei $z = a + ib \neq 0$ beliebig. Setzen $\widetilde{z} = \frac{z}{|z|}$. Dann ist $|\widetilde{z}| = 1$ und es ergibt sich die trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad (6b)$$

Zur Umrechnung:

$$\varphi =: \arg z \text{ mit } \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \text{ und } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |z| \cdot \cos \varphi \text{ und } b = |z| \cdot \sin \varphi$$

$\arg z$ heißt Hauptwert des Argumentes von z. Beachte hierbei: $-\pi < \arg z < \pi$ (Eindeutigkeit!) und $\arg 0$ ist nicht definiert.

Beispiel 1.2

Sei $z := i - \sqrt{3}$, also $\operatorname{Re} z = -\sqrt{3}$ und $\operatorname{Im} z = 1$. Der Betrag ist $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ und für das Argument gilt: $\cos \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$. Also sieht z in der trigonometrischen Darstellung so aus: $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

Wir definieren zweckmäßigerweise:

Definition 1.5

$\mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^{a} (\cos b + i \sin b) \qquad (7)$

Ein Spezialfall ist die Euler-Relation: $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \qquad (8)$

Es gilt (ohne Beweis): $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 + z_2} \; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad (9)$

Aus $(6b)$ und (8) folgt die Exponentialdarstellung der komplexen Zahlen: $z = |z| \, \mathrm{e}^{i\varphi}$

1.2 Rechnen in den komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$)

Im folgenden sei:

$$z_1 = a_1 + ib_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = a_2 + ib_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2}$$

Aus der Definition der komplexen Zahlen als geordnete Paare folgt für die Gleichheit:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2) \Leftrightarrow (r_1 = r_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}) \qquad (1)$$

Eine Ordnungsrelation $<$ oder $\leq$ wird in zc nicht definiert. Eine mit $+$ und $\cdot$ verträgliche Ordnungsrelation müsste u.a. folgende Eigenschaft haben: $a > 0 \wedge b > 0 \Leftrightarrow a \cdot b > 0$. Speziell $a^2 > 0$. Dies gilt in $\mathbb{C}$ wegen $i^2 = -1$ nicht.

1.2.1 Addition und Subtraktion

Per Definition ist $z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Beispiel 1.1

Sei $z_0 = a + ib$. Für $z = x + iy$ gilt dann: $(z - z_0) = (x - a) + i(y - b) \Rightarrow |z - z_0| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$
Dann ist $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} = \left\{z \in \mathbb{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$ in der grafischen Darstellung ein Kreis mit dem Mittelpunkt (a, b) und dem Radius r.

1.2.2 Multiplikation und Division

Satz 1.1

In der arithmetischen Darstellung erfolgt die Multiplikation gliedweise unter Anwendung des Distributivgesetzes. Lediglich $i^2 = -1$ muss beachtet werden, sonst erfolgt die Rechnung intuitiv. Dividiert wird durch Erweiterung des Bruches mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$

Beispiel 1.2

$\frac{3-2i}{-3+5i} = \frac{(3-2i)\cdot(-3-5i)}{(-3+5i)\cdot(-3-5i)} = \frac{-9-15i+6i+10i^2}{9-25i^2} = \frac{-9-15i+6i-10}{9+25} = \frac{-19-9i}{34} = -\frac{19}{34} - \frac{9}{34}i$

Satz 1.2

In der trigonometrischen bzw. exponentiellen Darstellung ist

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \text{ und } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (3)$$

Beispiel 1.3

Sei $z_0 = r_0 \cdot \mathrm{e}^{i\varphi_0}$ fest. Mit $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$ gilt $z_0 \cdot z = r_0 \cdot r \cdot \mathrm{e}^{i(\varphi_0 + \varphi)}$. Die Abbildung $z \mapsto z_0 \cdot z$ beschreibt eine Drehstreckung (Drehung um φ_0 und Streckung bzw. Stauchung um den Faktor r_0).

Ist $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$, dann ist $z^2 = r^2 \cdot \mathrm{e}^{2i\varphi}$. Allgemein gilt der...

Satz 1.3

$z^n = r^n \cdot \mathrm{e}^{in\varphi} \qquad (4)$

Speziell für $r = 1$: $\mathrm{e}^{in\varphi} = (\mathrm{e}^{i\varphi})^n$, also

Satz 1.4 Moivre-Formel

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ (5)

Gesucht seien alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$ (6).

Ansatz: $z = \varrho \cdot \mathrm{e}^{i\psi}$.
$\overset{(6)}{\Rightarrow} (\varrho \cdot \mathrm{e}^{i\psi})^n = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \Rightarrow \varrho^n \cdot \mathrm{e}^{in\psi} = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$
$\overset{(1)}{\Rightarrow} \varrho^n = r \wedge n\psi = \varphi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \varrho = \sqrt[n]{r} \wedge \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Wegen $\mathrm{e}^{2ki\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$ sind nur die Lösungen z für $k = 1, \ldots, n-1$ voneinander verschieden. Die Gleichung (6) hat also genau n Lösungen.

Satz 1.5

$z = z_k := \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ mit $k = 0.\ldots, n-1$

Beispiel 1.4

$z^3 = 8 \Rightarrow n = 3, r = 8, \varphi = 0$
$\Longrightarrow z = z_k := 2 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ mit $k = 0, 1, 2$
$\Longrightarrow z_0 = 2, z_1 = -1 + \sqrt{3}i, z_2 = -1 - \sqrt{3}i = z_1^*$
Die Lösungen liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und sind die Ecken eines gleichmäßigen n-Eckes.

1.2.3 Quadratische Gleichungen

Sei $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ gegeben. (8)

$$\underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{=:z} = \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{=:d} \Rightarrow z^2 = d$$

Fall $d \geq 0$:	Fall $d < 0$:
$z_{0,1} = \pm\sqrt{d}$	$d = (-d) \cdot \mathrm{e}^{i\pi}$ $z^2 = -d \cdot \mathrm{e}^{i\pi}$ $z = z_k := \sqrt{-d} \cdot \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}$ $z_0 = \sqrt{-d} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-d} \cdot i$ $z_1 = -\sqrt{-d} \cdot i$

Satz 1.6

Eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ hat die Lösungen:
$z_{0,1} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d} \cdot i = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \cdot i}$

Beispiel 1.5

$x^2 + 4x + 13 = 0 \Rightarrow d = -9 \Rightarrow x_{0,1} = -2 \pm 3i$

2 Matrizen

2.1 Grundbegriffe

Beispiel 2.1

Lineares Gleichungssystem (LGS) für x_1, x_2, x_3:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -8 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Wir verwenden im Folgenden die folgende Kurzschreibweise.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 4 & -2 & 2 & -8 \\ 3 & 6 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -2 & 6 & -2 & -1 \end{array}$$

Wir schreiben im Folgenden vereinfachend $\mathbb{K}$ als Oberbegriff für die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Definition 2.1

Ein rechteckiges Schema von Elementen aus $\mathbb{K}$ heißt Matrix.

Matrizen werden für gewöhnlich mit Großbuchstaben bezeichnet, die in Handschriften unterstrichen werden und in Druckwerken fett gesetzt werden.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Elemente einer Matrix werden wie oben dargestellt mit Doppelindices dargestellt. Das Element a_{ik} steht dabei in der i-ten Zeile und in der k-ten Spalte. Man schreibt kurz $\mathbf{A} = (a_{ik})$.

Definition 2.2

Eine Matrix $\mathbf{M}$ von Elementen aus $\mathbb{K}$ mit m Zeilen und n Spalten heißt Matrix vom Typ (m,n) oder kurz (m,n)-Matrix. Man sagt: $\mathbf{M} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dabei ist $\mathbb{K}^{m\times n}$ die Menge aller (m,n)-Matrizen über $\mathbb{K}$. Eine (m,m)-Matrix heißt quadratische Matrix.

Definition 2.3

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, dann heißt $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ die zu A transponierte Matrix.

2.1.1 Spezielle Matrizen

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ - Nullmatrix

Die durch die Elemente $a_{11}, a_{22}, ...$ einer *quadratischen* Matrix M beschriebene Diagonale heißt Hauptdiagonale der Matrix M.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ - Einheitsmatrix

(Alle Elemente der Hauptdiagonale sind gleich Eins, alle anderen Elemente sind gleich Null.)

Eine (n,1)-Matrix heißt n-Spaltenvektor, eine (1,n)-Matrix heißt n-Zeilenvektor. Vektoren werden nicht mit großen Buchstaben, sondern mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Die Elemente von Vektoren werden mit einfachen Indizes beschriftet.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_n \end{pmatrix}$$

Man schreibt verkürzend $\mathbb{K}^{n\times 1} = \mathbb{K}^n$ für die Menge aller n-Spaltenvektoren und $\mathbb{K}^{1\times n} = \mathbb{K}_n$ für die Menge aller n-Zeilenvektoren. Zur Übersichtlichkeit werden die Elemente von Zeilenvektoren mit Kommata getrennt.

Beispiel 2.2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1, -2, 0 \end{pmatrix}^T}_{\substack{\text{platzsparende} \\ \text{Schreibweise}}} \in \mathbb{R}^3$$

Beispiel 2.3

$$\begin{pmatrix} 3-2\mathrm{i} \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \ \begin{pmatrix} 3-2\mathrm{i}, 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2$$

Definition 2.4

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ heißen gleich, wenn sie gleichen Typs sind und gilt: $a_{ik} = b_{ik} \forall i, k$. Man schreibt $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Beispiel 2.4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$$ (**A** ist eine (2,2)-Matrix, **B** ist aber eine (2,3)-Matrix.)

Bemerkung

Nach der obigen Definition gilt zum Beispiel in $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$

Definition 2.5

Seien $\mathbf{A} = (a_{ik}), \mathbf{B} = (b_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ Matrizen des gleichen Typs und sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann setzt man $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik} + b_{ik})$ und $\lambda \cdot \mathbf{A} = (\lambda \cdot a_{ik})$. Das heißt, Addition von Matrizen und Multiplikation mit einer Zahl erfolgen elementweise.)

Beispiel 2.5

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.
Dann sind $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ und $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ nicht definiert.
$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $3 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Definition 2.6

Sei $\underline{A} = (a_{ik})$ eine (m, p)- Matrix und $\underline{B} = (b_{ik})$ eine (p, m)- Matrix.
Produkt: $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ eine (m, n)- Matrix mit den Elementen:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} (a_{ij} \cdot b_{jk}) = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ip}b_{pk}$$

Die i-te Zeile von $\underline{A}$ mal k-te Spalte von $\underline{B}$!

Beispiel 2.6

$$\begin{array}{c|c}
 & \left.\begin{matrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 3 \end{matrix}\right\} \underline{B} \\
\hline
\underline{A} \left\{\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 3 & 5 & 10 & 3 \\ -11 & 9 & 25 & 14 \end{matrix}\right\} \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}
\end{array}$$

Beispiel 2.7

Geg,: LGS

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 3 & 6 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

LGS ist als Matrixgleichung $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{B}$ darstellbar.

Beachte: Im allgemeinen ist $\underline{AB} \neq \underline{BA}$!!

Beispiel 2.8

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Selber rechnen.

2.2 Elementare Umformungen, Gauß-Algorithmus

Beispiel 2.1

LGS mit Parameter $c \in \mathbb{R}$. Gesucht: $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$

$$
\begin{array}{cccc|c|cc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 & & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 3 & 1 & |\cdot 2 & |\cdot -2 \\
-4 & 2 & 0 & -2 & 0 & \overset{(+)}{\hookleftarrow} & \downarrow \\
4 & -6 & 2 & 8 & 4 & & \overset{(+)}{\hookleftarrow} \\
0 & 2 & -1 & -1 & c & & \\
\hline
 & & \underline{A} & & \underline{b} & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\
\hline
2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\
0 & -4 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & -1 & -1 & c \\
\hline
 & & \underline{A}_1 & & \underline{b}_1
\end{array}
$$

1. Schritt: An ersten Stellen 0 erzeugen. $\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{A}_1\underline{x} = \underline{b}_1$

$$
\begin{array}{cccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 3 & 1 & \\
0 & -4 & 2 & 2 & 2 & \cdot\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 4 & 2 & \downarrow \\
0 & 2 & -1 & -1 & c & \overset{(+)}{\hookleftarrow} \\
\hline
 & & \underline{A}_2 & & \underline{b}_2 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\
2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\
0 & -4 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c+1 \\
\hline
 & & \underline{A}_3 & & \underline{b}_3
\end{array}
$$

2. Schritt: An den zweiten Stellen 0 erzeugen. Eventuell Zeilen tauschen. $\underline{A}_2\underline{x} = \underline{b}_2 \Leftrightarrow \underline{A}_3\underline{x} = \underline{b}_3$

LSG lösbar für: $c = -1$

$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}$

$-4x_2 + 2x_3 + 1 = 2, \qquad x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}, \qquad x_1 = \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ Lösungsvektor:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig. Bedingung: } c = -1
$$

Verallgemeinerung: Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Folgende Operatoren heißen elementare Zeilenumformungen (EZU).

- Typ 1: Vertauschen zweier Zeilen
- Typ 2: Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K} \neq 0$
- Typ 3: Addition eines λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Satz 2.1

Jede Matrix $\underline{A}$ kann durch endlich viele EZU in eine Matrix $\underline{\widetilde{A}}$ in Zeilenstufenform überführt werden.

$$\underline{\widetilde{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1k_1} & \cdots & \cdots & (*) \\ 0 & \tilde{a}_{2k_2} & \cdots & (*) \\ \vdots & & \ddots & (*) \\ \vdots & & & \tilde{a}_{rk_r} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\widetilde{A}}$ hat Zeilenstufenform bedeutet:

- $\tilde{a}_{nk_n} \neq 0$ für $n = 1, \ldots, r$
- $(*)$: beliebige Elemente
- Links von $\tilde{a}_{nk_n}$ für $n = 1, \ldots, r$ steht nur 0, und dessen Anzahl nimmt in jeder Zeile zu ($\downarrow$).

Satz 2.2

Entsteht $(\underline{\widetilde{A}}|\underline{\widetilde{b}})$ durch EZU aus $(\underline{A}|\underline{b})$, so gilt: $\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{\widetilde{A}}\underline{x} = \underline{\widetilde{b}}$,
d.h. sie LSG $\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \wedge \underline{\widetilde{A}}\underline{x} = \underline{\widetilde{b}}$ haben das selbe Lösungsverhalten..

Hierbei: $\underbrace{\underline{A} = (a_{ik})}_{\text{Koeffizientenmatrix}}$, $\underline{b} = (b_i)$, dann $\underbrace{(\underline{A}|\underline{b})}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Satz 2.3 Gauß'scher Lösungsalgorithmus zur Lösung $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$

1. $(\underline{A}|\underline{b}) \overset{(EZU)}{\rightarrow} (\underline{\widetilde{A}}|\underline{\widetilde{b}})$, so dass $\underline{\widetilde{A}}$ in Zeilenstufenform ist.
2. $\underline{\widetilde{A}}\underline{x} = \underline{\widetilde{b}}$ auf Lösbarkeit untersuchen.
3. Die Unbekannten lösen (von unten nach oben).

3 Gruppen und Körper

Definition 3.4

(a) Sei $G \neq \varnothing$. Eine Abbildung von $G \times G \to G$ heißt Verknüpfung auf G.

(b) Sei eine Verknüpfung $+ : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a + b$ (Addition), sodass gilt:

- (G1) $\forall a, b, \in G : (a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz)
- (G2) $\exists o \in G\ \forall a \in G : a + o = a$ und $o + a = a$ (o: neutrales Element)
- (G3) $\forall a \in G \exists a' \in G : a + a' = o$ und $a' + a = o$ (a': inverses Element)

Dann heißt das geordnete Paar $(G, +)$ Gruppe. Gilt zusätzlich:

- (G4) $\forall a, b \in G : a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

Dann heißt das geordnete Paar $(G, +)$ abelsche Gruppe.

Bemerkung

1. Das neutrale Element o einer Gruppe $(G, +)$ ist eindeutig bestimmt.
   Beweis: Angenommen, es gibt ein $o' \in G : a+o' = a$ und $o'+a = a\ \forall a \in G \Rightarrow o = o'+o = o'$
2. Auch das inverse Element a' zu a ist eindeutig. (Beweis analog)
   Man schreibt statt a' auch $-a$ und $b + (-a) = b - a$.
3. Man kann eine Gruppe auch „multiplikativ" schreiben: $(G, \cdot)$
   Man bezeichnet dann das neutrale Element mit e und das zu a inverse Element mit a^{-1}. Also hat man statt (G2) und (G3):
   - (G2*) $\exists e \in G\ \forall a \in G : a \cdot e = a$ und $e \cdot a = a$
   - (G3*) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = 1$ und $a^{-1} \cdot a = 1$

Beispiel 3.2

$(\mathbb{Z}, +)$ mit üblicher Addition ist eine abelsche Gruppe
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ mit üblicher Multiplikation ist keine Gruppe, da $a = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
Aber $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.

Beispiel 3.3 WICHTIGES BEISPIEL

Sei $M \neq \varnothing$ beliebig. $S(M) :=$ Menge aller bijektiven Abbildungen $M \to M$
Verknüpfung: $(f \circ g)(x) := f(g(x)) \, \forall x \in M, f \circ g$: Komposition von f und g.
Neutrales Element ist die identische Abbildung $id_M : M \to M, id_M(x) = x \, \forall x \in M$
Inverses Element zu $f \in S(M)$ bezüglich $\circ$ ist die Umkehrfunktion f^{-1}, denn $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$
$S(M)$ ist eine Gruppe (nicht abelsch), denn im allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$ (z.B .$M = [0,1], f(x) = \sqrt{x}$)
$g(x) = 1 - x$. Dann $f, g \subset S(M), (f \circ g)(x) = \sqrt{1-x}$, aber $(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x}$
$S(M)$ heißt symmetrische Gruppe von M.

Beispiel 3.4 Spezialfall

$S_n := S(\{1, \dots, n\}) =$ symmetrische Gruppe aller Permutationen der Zahlen $1, \dots, n \Rightarrow$Permutationsgruppe
Sei eine Permutation gegeben $\sigma \subset S_n$ (also bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst)
σ kann als $(2, n)$- Matrix geschrieben werden: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
z.B. $\sigma \subset S_n : \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, also $\sigma(1) = 3, \dots$
Sei weiter $r \in S_n : r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dann $r \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3.1 Mengen mit zwei Verknüpfungen

Definition 3.1

Sei $K \neq \varnothing$ und zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K, (\lambda, \mu) \mapsto \lambda + \mu$ (Addition) und
$\cdot : K \times K \to K, (\lambda, \mu) \mapsto \lambda \cdot \mu$ (Multiplikation), so dass gilt:

- (K1) $\forall \lambda, \mu \in K : \lambda + \mu = \mu + \lambda$ (Kommutativität bezüglich $+$)
- (K2) $\forall \lambda, \mu, v \in K : (\lambda + \mu) + v = \lambda + (\mu + v)$ (Assoziativität bezüglich $+$)
- (K3) $\exists o, \lambda \in K : \lambda + o = \lambda$ (neutrales Element bezüglich $+$)
- (K4) $\forall \lambda \in K \exists - \lambda \in K : \lambda + (-\lambda) = o$ (inverses Element bezüglich $+$, eindeutig)
- (K5) $\forall \lambda, \mu \in K : \lambda\mu = \mu\lambda$ (Kommutativität bezüglich $\cdot$)
- (K6) $\forall \lambda, \mu, v \in K : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ (Assoziativität bezüglich $\cdot$)
- (K7) $\exists e \in K, e \neq o, \lambda \in K : \lambda \cdot e = \lambda$ (neutrales Element bezüglich $\cdot$)
- (K8) $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0 \exists \lambda^{-1} \in K : \lambda \cdot \lambda^{-1} = e$ (inverses Element bezüglich $\cdot$, eindeutig)
- (K9) $\forall \lambda, \mu v \in K : \lambda(\mu + v) = \lambda\mu + \lambda v$ (Distributivgesetz),
  dann heißt das Tripel $(K, +, \cdot)$ Körper.

Beispiel 3.1 Standardbeispiel

$(\mathbb{R}, +, \cdot) \wedge (\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit üblicher Addition und Multiplikation sind Körper.

Beispiel 3.2 weitere Beispiele

$K :=$ Menge aller gebrochen rationalen Funktionen.
$x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, (a_n, \ldots, a_0, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$ gegben)
Addition und Multiplikation seien Elementweise definiert:
$f, g \in K \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x$
$\Rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\ \forall x$
$\Rightarrow$ damit ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Bemerkung

4. Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $(K, +)$ und $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind und das Distributivgesetz gilt.
5. Schreibe häufig 1 statt e und 0 statt o.

4 Vektorräume

4.1 Begriff: Vektorraum

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 4.1

Sei $V \neq \varnothing$ und zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V, (a,b) \mapsto a+b$ (Addition) und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, a) \mapsto \lambda a$ (skalare Multiplikation), so dass gilt:

- (V1) $a+b = b+a \forall a,b \in V$
- (V2) $\forall a,b,c \in V : (a+b)+c = a+(b+c)$
- (V3) $\exists o \in V \forall a \in V : a+o = a$
- (V4) $\forall a \in V \exists a' \in V : a+a' = o$ $(a' = -a)$
- (V5) $1a = a, 1 \in \mathbb{K}, \forall a \in V$
- (V6) $\forall a \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$
- (V7) $\forall a,b \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$
- (V8) $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \underbrace{(\lambda+\mu)a}_{\text{Addition in } \mathbb{K}} = \underbrace{\lambda a + \mu a}_{\text{Addition in } V}$

dann heißt das Tupel $(V, +, \cdot)$ Vektorraum über $\mathbb{K}$ oder linearer Raum über $\mathbb{K}$ oder $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Bemerkung

Die Elemente von V heißen (!) Vektoren, speziell heißt o Nullvektor (Nullelement). Die Elemente von $\mathbb{K}$ heißen hierbei
Skalare. Statt $(V, +, \cdot)$ kurz: V.

Beispiel 4.1

Standardbeispiel: $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (reeller Vektorraum) mit + oder · wie fr Matrizen (+) und reelle Zahlen (·) d

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} ; = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Analog: $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}^{1xn}$

sowie: $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}_n$: dies sind $\mathbb{C}$-Vektorräume.

Allgemein: $\mathbb{K}^{mxn}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit + und $\cdots$ wie in 2.1 definiert.

Beispiel 4.2

Sei V eine Abbildung (D, W) die Menge aller Abbildungen von einer nichtleeren Menge D in einen Vektorraum W (z.B $W = \mathbb{R}$).
Fr $f, g \in Abb(D, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ (=Skalarkörper von W) sei
$\underbrace{(f+g)(x)}_{\text{Addition in } V} = \underbrace{f(x)+g(x)}_{\text{Addition in } W}, \quad \underbrace{(\lambda f)(x)}_{\text{skalare Multiplikation von } W} = \underbrace{\lambda f(x)}_{\text{Skalarmultiplikation in } W}.$
Dann sind auch $(f+g) \in Abb(D, W)$ und $(\lambda f) \in Abb(D, W)$
Betrachte: Abb ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis

zu zeigen: Es gelten (V1) bis (V8)
(V1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \overset{\text{Kommutativität in W}}{=} g(x) + f(x) = (g+f)(x) \forall x \in D$
somit ist $(f+g) = (g+f)$
$\vdots$
(V3) $o(x) := \mathbb{O} \forall x \in D$, wobei D=Nullelement von W.
Damit ist die Abbildung o das Nullelement in $Abb(D, W)$, denn es gilt:
$(o+f)(x) = o(x) + f(x) = \mathbb{O} + f(x) = f(x) \forall x \in D$,
also ist $(o+f) = f \to (f+o) = f$. Die gilt $\forall f \in Abb(D, W)$
o ist tatsächlich Nullelement von $Abb(D, W)$
$\vdots$
(V8) $\cdots$ analog fr brige Axiome

■

Sei nun V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Definition 4.2

Eine nichtleere Teilmenge U von V heißt Untervektorraum von V wenn gilt:

- (U1) $\forall a, b \in U : a + b \in U$
- (U2) $\forall a \in U \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda a \in U$

Satz 4.3

Jeder Untervektorraum U von V ist selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis

zu zeigen: es gelte (V1) bis (V8)
(V1) $\forall a, b \in U \Leftarrow a, b \in V \Leftarrow a + b = b + a$ (Kommutativität gilt)
$\vdots$
(V3) Betrachte das Nullelement o aus V gehört zu U
Beweis: Sei $a \in U (\exists a$, da $U = \mathbb{O})$
zu zeigen: $0a = 0$. Es gilt $0a = (0+0)a \overset{V8}{=} 0a + 0a$
aber: $0 \overset{V4}{=} 0a + (-0)a = [0a + 0a] + (-0)a \overset{V2}{=} 0a + [0a + (-0)a] \overset{V4}{=} 0a + 0 \overset{V3}{=} 0a$
Somit $0 = 0a \in U$
also gilt (V3) fr U, da (V3) fr V gilt.
$\vdots$
(V8)$\cdots$ analog für übrige Axiome

■

Beispiel 4.3

Sei $(a, b) \in \mathbb{R}_2$ fest.
Dann ist $U := \{\lambda(a, b) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}_2$.

4.2 Vektoren in der Physik

Im „Anschauungsraum“ $\mathcal{A}$ sei ein Punkt O (Nullpunkt) fixiert. Dann ist jeder Punkt P von $\mathcal{A}$ durch seine Ortsvektoren $\vec{OP}$ eindeutig bestimmt.
Sei $\mathcal{A}_0$ die Menge aller Ortsvektoren $\vec{OP}$ mit $P \in \mathcal{A}$. Addition und Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ werden geometrisch definiert.
Dann ist $\mathcal{A}_0$ ein reeler Vektorraum.

Bisher: Vektoren, die in einem festen Punkt „angeheftet“ sind: gebundene Vektoren.
Jetzt: Vektoren, die an verschieden Punkte O und O' „angeheftet“ sind. Man erhält verschiedene Vektorräume $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_{0'}$.

Ein freier Vektor $\vec{a}$ ist die Menge aller aus einem gebundenen Vektor durch Translation entstehenden gebundenen Vektoren. Dann gilt:

Satz 4.1

$\vec{OP}$ und $\vec{O'P'}$ repräsentieren den selben freien Vektor $\vec{a}$ genau dann, wenn sie gleiche Länge haben und gleichgerichtet sind.

Definition 4.2

Sei $\mathcal{A}_{frei}$ die Menge aller freien Vektoren. Sei $P \in \mathcal{A}$ und $\vec{a} \in \mathcal{A}_{frei}$. Dann heißt die Menge g aller $X \in \mathcal{A}$, für die ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda\vec{a}$ (1)
Gerade durch P mit dem Richtungvektor $\vec{a}$.

Bemerkung

Hierbei heißt (1) Parameterdarstellung der Geraden g.

Definition 4.3

Nun sei gegeben: $P \in \mathcal{A}$ und die freien Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, so dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallel sind.
(d.h. es gilt nicht: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ oder $\vec{b} = \mu\vec{a}$)
Dann heißt die Menge E aller $X \in \mathcal{A}$, für die Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ existieren mit $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ (2)
Ebene durch P mit den Richtungvektoren $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Bemerkung

Hierbei heißt (2) Paramterdarstellung von E (mit den Parametern λ und μ)

4.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Definition 4.1

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, so heißt $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r \in V$ eine Linearkombination der Elemente $v_1, \ldots, v_r$. Die Menge $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_r) := \{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r : \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}\}$ heißt **lineare Hülle** von $v_1, \ldots, v_r$.
Zusätzlich definiert man $\operatorname{lin}(\varnothing) := \{o\}$.

Bemerkung

$\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_r)$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis

(U1) Sei $a = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_r)$ und $b = \mu_1 \cdot v_1 + \ldots + \mu_n \cdot v_n r \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_r)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$a + b = (\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r) + (\mu_1 \cdot v_1 + \ldots + \mu_r \cdot v_r) \underset{\text{Axiome von } V}{=} (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots (\lambda_r + \mu_r)v_r$$

(U2) Analog

■

Beispiel 4.1

Gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Dann is

$$\operatorname{lin}(v_1, v_2) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition 4.2

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ heißen linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r = 0$ (wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$) stets $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ folgt, andernfalls heißen sie linear abhängig.

Bemerkung

Für $v_1, \ldots, v_r \in V$ sind äquivalent:

(a) $v_1, \ldots, v_r$ sind linear unabhängig.

(b) Keiner der Vektoren lässt sich als Linearkombination der übrigen darstellen.

Beweis

(a) $\Rightarrow$ (b) Beweisen indirekt.
Gelte (a), angenommen (b) gilt nicht. Dann gilt z.B. $v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \cdot v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_r v_r$ mit bestimmten $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Es folgt $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \cdot v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_r v_r = 0$. Hierbei ist $\lambda_i := -1 \neq 0$. Also sind $v_1, \ldots, v_r$ nicht linear unabhägig: Widerspruch!

(b) $\Rightarrow$ (a) Beweisen indierkt. Gelte (b), angenommen (a) gilt nicht.
Mit $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r = 0$ und einem $\lambda \neq 0$ folgt $v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_i} v_r$ also ist v_i eine Linearkombination der übrigen v_k: Widerspruch zu (b).

$\blacksquare$

Definition 4.3

Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren heißt Basis von V, wenn gilt:

(B1) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

(B2) $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n) = V$

Bemerkung

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V so gibt es zu jedem $v \in V$ genau ein n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}_n$, so dass $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = V \qquad (1)$

Beweis

Nach (B2) gibt es $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, so dass (1) gilt. Angenommen es gibt auch $\lambda'_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda'_r \cdot v_r = v$ mit $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r \in \mathbb{K}$ Dann folgt $(\lambda_1 - \lambda'_1)v_1 + \ldots + (\lambda_r - \lambda'_r)v_r = v - v = 0$ wegen (B1) also $\lambda_1 - \lambda'_1 = 0, \ldots, \lambda_r - \lambda'_r = 0$.

$\blacksquare$

Beispiel 4.2

Betrachten in $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Behauptung: $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$, die sogenannte **Standardbasis** oder kanonische Basis.

Beweis

zu (B1) $\lambda_1 \cdot \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \underline{e}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$

zu (B2) Sei $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, also $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Dann gilt: $\quad nv = \underline{v}_1 \cdot \underline{e}_1 + \ldots + \underline{v}_n \cdot \underline{e}_n \in \operatorname{lin} \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$

$\blacksquare$

Satz 4.4 Basisergänzungssatz

Seien $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \in V$ und gelten:

(b1) $v_1, \ldots, v_r$ sind linear unabhängig.

(b2) $\text{lin}(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s) = V$

Dann kann man $(v_1, \ldots, v_r)$ durch eventuele Hinzunahme geeigneter Elemente aus $(w_1, \ldots, w_s)$ zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis
(durch Induktion bezüglich s)
Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ bereits Basis, setze $s := 0$(Induktionsanfang). Hierfür gilt die Aussage definitionsgemäß.

Nun sei die Aussage für $s = m$ wahr (Induktionsannahme). Zu zeigen: Aussage gilt auch für $s = m+1$. Sei also $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m+1} \in V$ gelte (b1) sowie $\text{lin}(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m+1}) = V$. Falls $v_1, \ldots, v_r$ nicht Basis von V dann ist mindestens ein w_i nicht in $\text{lin}(v_1, \ldots, v_r)$ enthalten.

Behaupung: $v_1, \ldots, v_r, w_i$ sind linear unabhängig.
Beweis: Gelte $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r + \ldots + \mu w_i = 0$ wäre $w_i = -\frac{\lambda_1}{\mu} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\mu} v_r$: Widerspruch: Somit gilt $\mu = 0$ und daher $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r = 0$. Wegen (b1) folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$

Nach Induktionsannahme kann $v_1, \ldots, v_r, w_i$ zu einer Basis ergänzt werden. Also gilt die Aussage auch für $s = m+1$

■

Lemma 4.5 Austauschlemma

Seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ Basen von V. Dann gibt es zu jedem v_i ein w_k. so dass aus $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis entsteht, wenn v_i durch w_k ersetzt wird.

Beweis
Sei v_i gegeben. Dann gibt es ein k, so dass $w_k \notin \text{lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ (andernfalls wäre $\text{lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \supseteq \text{lin}(w_1, \ldots, w_m) = V$). Somit sind $v_1, \ldots, v_{i-1}, w_k, v_{i+1}, \ldots v_n$ (*) linear unabhängig (Bemerkung 2). Weiter ist $\text{lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_k, v_{i+1}, \ldots, v_n) = V$ (vergleiche (b2)). nach Satz 1 gilt also Fall 1 oder Fall 2:

Fall 1: (*) ist bereits Basis.

Fall 2: (*) kann durch Hinzunahme von v_i zu einer Basis ergänzt werden.

Fall 2 kann nicht eintreten, da $w_k \in \text{lin}(v_1, \ldots, v_n)$, also $v_1, \ldots, v_{i-1}, w_k, v_{i+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Also liegt Fall 1 vor.

■

Theorem 4.6 mit Definition

Seien $(n_1, \ldots, n_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ Basen von V, so gilt $n = m$. Diese gemeinsame Zahl heißt Dimension von V. Man schreibt $\dim V$.

Beweis Beweis des Theorems

Angenommen es wäre $n \neq m$, also o.E.d.A $n > m$. Nach Satz 2 könnte jedes v_i gegen ein w_k ausgetauscht werden. Es entsteht eine neuen Basis, in der mindestens ein w_k zweimal vorkommt (da $n > m$): Wiederspruch, da ein solches System linear abhängig ist

■

Bemerkung

Der Vektorraum $V = \{0\}$ hat keine Basis. Man setzt $\dim \{0\} = 0$.

Bemerkung

Sind$v_1, \dots, v_r \in V$ und gilt $r > \dim V$ so sind $v_1, \dots, v_r$ linear abhängig. Also ist $\dim V$ die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren von V.

Beweis

Sei $(w_1, \dots, w_n)$ Basis von V (also $\dim V = n$), dann gilt $\text{lin}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_n) = \text{lin}(w_1, \dots, w_n) = V$. wären $v_1, \dots, v_r$ linear unabhägig, so könnte man diese System nach Satz 1 durch Hinzunahme von geeigneten w_k zu einer Basis ergänzen. Deren Elementzahl wäre also $\geq r > \dim V \Rightarrow$ Widerspruch.

■

Beispiel 4.3

Nach Beispiel 2 ist $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ Basis von $\mathbb{R}^n$. also $\dim \mathbb{R}^n = n$. Somit sind mehr als n Vektoren in $\mathbb{R}^n$ stets linear abhängig.

Definition 4.7

Ist $V \neq \{0\}$ und besitzt V für keine $n \in \mathbb{N}$ eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ so heißt V unendlich dimensional, andernfalls endlich dimensional.

Beispiel 4.4

Sei $V = \text{Abb}([0,1], \mathbb{R})$, also V der reelle Vektorraum aller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (siehe 4.1). Für $k = 1, 2, \dots$ sei $f_k \in V$ wie Skizze.

Beweis

Die Funktion $\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_k \cdot f_k + \ldots + \lambda_r f_r$ hat für $x = x_k$ den Wert λ_k, wobei $x_k := \frac{1}{2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$. Ist also $\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_r \cdot f_r = 0$, d.h. gilt:

$$\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_r f_r(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

, dann folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ (betrachte Punkte $x = x_k$). Somit sind $f_1, \dots, f_r$ linear unabhängig. Die gilt für jedes $r \in \mathbb{N}$. Hätte V eine Basis $(g_1, \dots, g_n)$, dann müsste $r = n$ (siehe Bemerkung 5): Widerspruch. Also ist V unendlich dimensional.

■

---

5 Lineare Abbildungen und Matrizen

5.1 Grundbegriffe

Seien stets V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Definition 5.1

Eine Abbildung $L: V \to W$ heißt linear, wenn gilt:

(L1) $L(x+y) = L(x) + L(y) \qquad \forall x, y \in V$

(L2) $L(\lambda x) = \lambda L(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$

Statt lineare Abbildung auch Homomorphismus.
$\hom(V.W) :=$ Menge aller linearen Abbildungen $l: V \to W$.

Bemerkung

hom$(V.W)$ ist ein Untervektorraum (=Teilraum) von Abb(V, W).

Beweis

Sind $L_1, L_2 \in \hom(V, W)$, so folgt $(L_1 + L_2)(x+y) = L_1(x+y) + L_2(x+y) = L_1(x) + L_1(y) + L_2(x) + L_2(y) = (L_1 + L_2)(x) + (L_1 + L_2)(y)$.
Analog ($\in \hom(V.W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$) $\Rightarrow \lambda L \in \hom(V, W)$

∎

Beispiel 5.1

Sei $V = W = \mathbb{R}^3$ und $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $L\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$L\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Analog

$$L\left(\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot L\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Also ist $L \in \hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Beispiel 5.2

Sei $\underline{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ fest $veca_0 \neq vec0$. Sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T(\underline{a}) := \underline{a} + \underline{a}_0 \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^n$: Translation um $\underline{a}_0$.
Es gilt $T(2\underline{a}) = 2\underline{a} + \underline{a}_0$, aber $2T(\underline{a}) = 2(\underline{a} + \underline{a}_0) = 2\underline{a} + 2\underline{a}_0 \neq 2\underline{a} + \underline{a}_0 = T(2\underline{a}) \Rightarrow T$ ist nicht linear.

Bemerkung

Ist $L: V \to W$ linear, so gilt:

$$L(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \lambda_1 L(v_1) + \ldots + \lambda_r L(v_r) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in V$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Satz 5.2

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Dann gibt es zu jedem n-Tupel $(w_1, \ldots, w_n) \in W$ genau eine lineare Abbildung $l: V \to W$ mit $L(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis

1. Eindeutigkeit:
   Seien $L_1, L_2: V \to W$ linear mit $L_k(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $K = 1, \underset{=}{2}$. Sei $v \in V$ beliebig. Dann gilt $v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$ mit gewissen $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Es folgt: $L_1(v)$ L_1lin. $\lambda_1 L_1(v_1) + \ldots + \lambda_n L_1(v_n) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n = \lambda_1 L_2(v_1) + \ldots + \lambda_n L_2(v_n) = L_2(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = L_2(v)$, also $L_1 = L_2$

2. Existenz:
   Für $v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$ (1)
   sei $L(v) := \lambda_1 w_1 + \ldots \lambda_n w_n$ (2)
   Da es zu jedem $v \in V$ genau ein n-Tupel $(fl\lambda)$ gibt, so dass (1) gilt,ist $L: V \to W$ durch (2) eindeutig definiert, Es ist L linear und es gibt $L(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$

■

Bemerkung

Nach Satz 1 ist eine lineare Abbildung durch die Werte auf den Besisvektoren bereits vollständig festegelegt.

Definition 5.3

Sei $L: V \to W$ linear. Dann sind $\text{Bild}(L) := \{L(v) | v \in V\} \subset W$ (Wertevorrat) und $\text{Kern}(L) := \{v \in V | L(v) = 0\} \subset W$(Kern oder Nullraum) Untervektorräume von W bzw. V. Ist $\text{Bild}(L)$ endlichdimensional, so heißt $\text{Rang}(L) := \dim \text{Bild}(L)$. Rang der linearen Abbildung L.

Bemerkung

Ist W endlichdimensional (also auch $\text{Bild}(L)$ endlichdimensional), so gilt: L ist surjektiv

$$\Leftrightarrow \text{Rang}(L) = \dim W \qquad (3)$$

L ist injektiv $\Leftrightarrow \dim \text{Kern}(L) = 0$ (4)

Beweis

(3) (a) L surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild}(L) = W \Rightarrow \text{Rang}(L) = \dim \text{Bild}(L) = \dim W$

(b) $\text{Rang}(L) = \dim W \Rightarrow \text{Bild}(L) = W$: Wäre $\text{Bild}(L) \underset{\neq}{\subset} W$, dann könnte eine Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von $\text{Bild}(L)$ durch Hinzunahme von mindesetns einem $w_0 \in W$ zu einer Basis von W ergänzt werden, also wäre $\text{Rang}(L) = m < \dim W$: Widerspruch, also ist $\text{Bild}(L) = W$.

(4) L injektiv $\Leftrightarrow (L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2) \underset{L\text{lin.}}{\Leftrightarrow} (L(v_1 - v_2))0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0) \Leftrightarrow (L(0) = 0 \Rightarrow v = 0) \Leftrightarrow \dim \text{Kern}(L) = \dim \{0\} = 0$

■

Beispiel 5.3

Projektion $L:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Bild}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} | a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$, $\operatorname{Rang}(L) = \dim \operatorname{Bild}(L) = 2 < 3 = \dim W, \operatorname{Kern}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} | a_3 \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim \operatorname{Kern}(L) = 1 \neq 0 \Rightarrow L$ ist nich injekitv.

Definition 5.4

$L:\ V \to W$ heißt Isomorphismus, wenn L linear und bijektiv (also sowohl injektiv als auch surjektiv) ist. V und W heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $L:\ V \to W$ gibt.

Bemerkung

Ist $L:\ V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist auch $L^{-1}:\ W \to V$ ein Isomorphismus.

Satz 5.5

Sei $(v_1, \ldots, v_n))$ eine Basis von V und $L:\ V \to W$ linear. Dann gilt:
L ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow (L(v_1), \ldots, L(v_n))$ ist eine Basis von W.
Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Satz 5.6 Aus Satz 1 und Satz 2 folgt:

Sind V und W endlichdimensional, so gilt V und W sind isomorph $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Sei $B := (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Betrachten $\mathbb{K}^n$ mit Standartbasis $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$.
Nach Satz 1 mit $\mathbb{K}^n$ statt V unf V statt W gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi_B : \mathbb{K}^n \to V$ mit $\Phi_B(\underline{e}_i) = v$, für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz 2 und Satz 3 ist Φ_B ein Isomorphismus. Es gilt
$\Phi_B(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Phi_B(\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{e}_n) = \lambda_1 \Phi_B(\underline{e}_1) + \ldots + \lambda_n \Phi_B(\underline{e}_n) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

Definition 5.7

Ist $v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n \in V$ so heißt $\Phi_B^{-1}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B. Die endlichdienemsionenalen Untervektorräume $\operatorname{lin}(v_1), \ldots, \operatorname{lin}(v_n)$ heißen Koordonatenachsen, Φ_B Kanonischer Isomorphismus („Koordinatensystem“).

gehört zu einem bild
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

Theorem 5.8

Sei V ein endlichdiemensionaler VR und W eine beliebiger VR. Weiter sei $L:\ V \to W$ linear.
Dann gilt die Dimensionsformel $\dim \operatorname{Kern}(L) + \operatorname{Rang}(L) = \dim v$.

Beweis

Sei $\dim V = n, \dim \operatorname{Kern}(L) = r \quad$ (also $0 \leq r \leq n$)

Eine Basis $(v_1, \ldots, v_r)$ von Kern(L) kann zu einer Basis von $(Flvr, v_{r+1}, \ldots v_n)$ von V ergänzt erden (2.3 Satz 1). Sei $w_i := L(v_{r+i})$ für $i = 1, \ldots, n-r$. Dann gilt

$$L(\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \underbrace{L(v_1)}_{=0} + \ldots + \lambda_r \underbrace{L(v_r)}_{=0} + \lambda_{r+1} \underbrace{L(v_{r+1})}_{=w_1} + \ldots + \lambda_n \underbrace{L(v_n)}_{w_{n-r}} = \lambda_{r+1} w_1 + \ldots + \lambda_n w_r$$

Also ist Bild$(L) = \text{lin}(Flwn - r)$. (I)
Behauptung: $w_1, \ldots, w_{n-r}$ sind linear unabhängig. (II)
Beweis:
Gelte $0 = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-r} w_{n-r} = \alpha_1 L(v_{r+1}) + \ldots + \alpha_{n-r} L(v_n) = L(\alpha_1 v_{r+1} + \ldots + \alpha_{n-r} v_n)$ also ist $\alpha_1 v_{r+1} + \ldots \alpha_{n-r} v_n \in$ Kern(L)
Daher gilt $\alpha_a v_{r+1} + \ldots \alpha_{n-r} v_n = Ftl\lambda vr$ mit gewissem$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ (da (vr) Basis von Kern(L) ist).
Es folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0$ (und $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ da $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V ist).

Nach (I) und (II) ist $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ Basis von Bild(L), also gilt Rang$(L) = \dim \text{Bild}(L) = n - r$. Insgesamt gilt $\dim \text{Kern}(L) + \text{Rang}(L) = r + (n-r) = n = \dim V$.

■

Folgerung:
Seien V und W endlich dimensional mit $\dim V = \dim W$. Dann gilt:

$$L \text{ ist surjektiv } \Leftrightarrow L \text{ ist injektiv.}$$

Beweis
Sei $\dim V = \dim W = n$. Dann gilt:
L ist surjektiv $\Leftrightarrow$ Rang$(L) = n \underset{\text{Theorem 1}}{\Leftrightarrow} \dim \text{Kern}(L) = 0 \underset{4}{\Leftrightarrow} L$ ist injektiv.

■

Bemerkung

Unter der Voraussetzung $\dim V = \dim W$ sind äuqivalent:

(a) Für jedes $b \in W$ hat die lineare Gleichung $L(x) = b$ mionestens eine Lösung $x \in V$

(b) Die homogene Gleichung $L(x) = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$.

Gilt (b) und somit (a), dan hat die homogene Gleichung $L(x) = b$ für jedes $b \in W$ genau eine Lösung $x \in V$.

Beweis
(a) $\Leftrightarrow L$ surjektiv ist $\underset{\text{Folg.}}{\Leftrightarrow} L$ injektiv $\Leftrightarrow [L(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0] \Leftrightarrow$ (b)

Gelte (b), also auch (a). Sei $b \in W$ gegeben. Dann $\exists x \in V: \quad L(x_1) = b$ (nach(a)).
Sei $x_2 \in V$ und gelte auch $L(x_2) = 0$. Dann folgt $0 = L(x_1) - L(x_2) = L(x_1 - x_2)$. Nach (b) folgt $x_1 - x_2 = 0$.

■

5.2 Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Betrachte $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ mit den Standardbasen.
Sei eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben. Mit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\underline{A\lambda} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \tag{1}$$

Das heißt, es gilt:

$$\underline{A\lambda} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\lambda_k\right) \underline{e}_1 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\lambda_k\right) \underline{e}_m = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k\right) \underline{e}_i \tag{1*}$$

Offenbar ist die Abbildung $L_{\underline{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda}$ linear. (2)

Beispiel 5.1

Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, dann $L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}$, also $L_{\underline{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Beispiel 5.2 Spezialfall

Sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gegeben. Durch $L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) \overset{(2)}{=} \underline{A\lambda}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert.

$$L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda} = \sum_{i=1}^{3} (a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2)\, \underline{e}_i$$

Behauptung: $L_{\underline{A}}$ ist linear.

Beweis

Seien $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, also $\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$L_{\underline{A}}(\underline{x} + \underline{y}) = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \\ a_{31}(x_1 + y_1) + a_{32}(x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2) \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2) + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2) \end{pmatrix}$$

$$L_{\underline{A}}(\underline{x} + \underline{y}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{pmatrix} = L_{\underline{A}}(\underline{x}) + L_{\underline{A}}(\underline{y})$$

Analog: $L_{\underline{A}}(\alpha\underline{x}) = \alpha L_{\underline{A}}(\underline{x})\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

■

Nun sei eine lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gegeben. Ist $\underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n$, dann gilt:

$$\underline{\lambda} = \lambda_1\underline{e}_1 + \ldots + \lambda_n\underline{e}_n \Rightarrow L(\underline{\lambda}) = \lambda_1 L(\underline{e}_1) + \ldots + \lambda_n L(\underline{e}_n) \tag{3}$$

Wegen $L(\underline{e}_k) \in \mathbb{K}^m$ gibt es $a_{1k}, \ldots, a_{mk} \in \mathbb{K}$ mit

$$L(\underline{e}_k) = a_{1k}\underline{e}_1 + \ldots + a_{mk}\underline{e}_m \text{ für } k = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Hiermit ist eine Matrix $\underline{A} := (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben und es gilt:

$$L(\underline{\lambda}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L(\underline{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\underline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k\underline{e}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k\right)\underline{e}_i = \underline{A\lambda}$$

Damit ist gezeigt: Zu jedem L existiert ein $\underline{A}$ mit $L(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda}$.

Bemerkung

$$\underline{A\lambda} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gemäß (4) ist die k-te Spalte von $\underline{A}$ gerade der Koordinatenvektor von $L(\underline{e}_k)$ bzgl. der Basis $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ mit $k = 1, \ldots, n$.

Mit diesen Überlegungen ist gezeigt, dass unter Verwendung der Standardbasen $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n(\underline{e}_m)$ jede lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch eine Matrix $\underline{A}$ eindeutig beschrieben ist.

Behauptung: Für alle L existiert *genau ein* $\underline{A}$ mit $L(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda}$.

Beweis
Existenz wurde schon gezeigt. Zur Eindeutigkeit: Ist $\underline{B} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und gilt auch $L(\underline{\lambda}) = \underline{B\lambda}\ \forall \lambda \in \mathbb{K}^n$, so gilt insbesondere $\underline{Ae_k} = L(\underline{e}_k) = \underline{Be_k}$ für $k = 1, \ldots, n$. Somit ist die k-te Spalte von $\underline{A}$ gleich der von $\underline{B}$ (siehe Gleichung (4)). Also ist allgemein $\underline{A} = \underline{B}$.

■

Definition und Satz 5.1

(a) Ist eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben, so ist durch $L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) := \underline{A\lambda}$ eine lineare Abbildung $L_{\underline{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definiert.

(b) Ist eine lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gegeben, so gibt es genau eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, sodass gilt: $L(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda}\ \forall \lambda \in \mathbb{K}^m$ und $L_{\underline{A}} = L$.

Die Matrix $\underline{A}$ heißt Abbildungsmatrix der linearen Abbildung L bzw. $L_{\underline{A}}$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$.

Seien nun V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit den Basen $B := (v_1, \ldots, v_n)$ und $C := (w_1, \ldots, w_m)$. Weiter sei $L : V \to W$ linear. Seien $\Phi_B : \mathbb{K}^n \to V$ und $\Phi_C : \mathbb{K}^m \to W$ die kanonischen Isomorphismen. Für $\underline{\lambda} = (\lambda_k) \in \mathbb{K}^n$ und $\underline{\mu} = (\mu_k) \in \mathbb{K}^m$ gilt also:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] & W \arrow[d, shift left, "\Phi_C^{-1}"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "\Phi_C^{-1}\circ L\circ\Phi_B"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, shift left, "\Phi_C"'] \end{tikzcd}$$

$$\Phi_B(\underline{\lambda}) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$$

$$\Phi_C(\underline{\mu}) = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m \in W$$

$$L(\Phi_B(\underline{\lambda})) = L(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) \in W$$

Beachte: $\Phi_C^{-1} \circ L \circ \Phi_B$ ist als Verkettung linearer Abbildungen wieder linear. Also ist $\Phi_C^{-1} \circ L \circ \Phi_B$ mit einer Matrix $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ darstellbar:

$$\Phi_C^{-1} \circ L \circ \Phi_B(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda} \; \forall \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow L(\Phi_B(\underline{\lambda})) = \Phi_C(\underline{A\lambda}) \; \forall \lambda \in \mathbb{K}^n \tag{6}$$

Es gilt: $\underline{A\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k \right) \underline{e}_i$, also

$$\Phi_C(\underline{A\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k \right) w_i \tag{7}$$

Einsetzen von (5) und (7) in (6) ergibt:

$$L(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k \right) w_i \; \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \tag{8}$$

Die Eindeutigkeit der Matrix $\underline{A}$ folgt wie oben.

Definition und Satz 5.2

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit den Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$.

(a) Ist eine Matrix $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gegeben, so ist durch (8) eine lineare Abbildung $L : V \to W$ definiert.

(b) Ist eine lineare Abbildung $L : V \to W$ gegeben, so gibt es genau eine Matrix $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$, für die (8) gilt. Die Matrix $\underline{A}$ heißt Abbildungsmatrix von L bzgl. der Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$.

Beispiel 5.3

Sei $V = W = R^3$ mit Standardbasis (e_1, e_2, e_3). Betrachten Projektion $L : R^3 \to R^3$, $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, \lambda_2, 0)^T \; \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R^3$.
Gesucht ist Abbildungsmatrix von L.
Lösung: $L(e_1) = L(1, 0, 0) = (1, 0, 0)^T$, $L(e_2) = L(0, 1, 0) = (0, 1, 0)^T$, $L(e_3) = L(0, 0, 1) = (0, 0, 0)^T$.
Nach Bemerkung 1 gilt: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L(\underline{e}_2)$
Kontrolle: $\underline{A\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = L(\lambda)$.

Beispiel 5.4

Sei $V = W = R^2$ mit (e_1, e_2). Für $\varphi \in R$ sei $A_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
Wir definieren eine lineare Abbildung $D_\varphi := A_\varphi \lambda \; \forall \lambda \in R^2$.
Gesucht: Abbildungseigenschaften von $D_\varphi : R^2 \to R^2$.
Lösung: $D_\varphi(\underline{e}_1) = A_\varphi \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$,
$D_\varphi(\underline{e}_2) = A_\varphi \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{pmatrix}$
Ergebnis: D_φ beschreibt die Drehung aller Vektoren des R^2 um den Winkel φ. Drehung um Nullpunkt, für $\varphi > 0$ entgegen dem Uhrzeigersinn, für $\varphi < 0$ im Uhrzeigersinn (jeweils bei Blickrichtung $-\underline{e}_3$). Daher heißt A_φ auch Drehmatrix.

Beispiel 5.5

Sei $V = W = R^3$ mit $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Für $\varphi \in R$ sei $\underline{A}_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_\varphi(\underline{\lambda}) := \underline{A}_\varphi \underline{\lambda} \forall \underline{\lambda} \in R^3$.

Analog Beispiel 5.4 gitl: D_φ bescheibt die Drehung aller Vektoren des R^3 um den Winkel φ. Drehung um die Achse $Lin(e_3)$, für $\varphi > 0$ im Uhrzeigersinn bei Blickrichtung $\underline{e}_3$.

Beispiel 5.6

Sei $V = W = R^2$ mit Basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

Für $\alpha \in R$ sei $\underline{A}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $S_\alpha(\underline{\lambda}) := \underline{A}_\alpha \underline{\lambda} \forall \underline{\lambda} \in R^2$.

Hier $S_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $S_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$

Ergebnis: S_α beschreibt die Spiegelung alle Vektoren des R^2 an der Geraden g.

Beispiel 5.7

Zusammenhang zwischen linearer Abbildung $L : V \to W$ und Matrix $\underline{A} \in R^{m \times n}$ bezüglich gegebener Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ in V und $(w_1, \ldots, w_m)$ ind W (siehe Satz 2):

$L(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ik}) w_i \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in K^n \qquad (9)$

hierbei $\underline{A} = (a_{ik})$.

Sei jetzt $V = R^3$ mit Basis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ und $W = R^2$ mit Basis $C := (\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, wobei

$\underline{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\underline{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5.8

Beweis der linearen Unabhängigkeit: Gleichungssystem $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$ hat nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Analog für $\underline{w}_1$ und $\underline{w}_2$.

Sei $L : V \to W$ linear und gelte

$L(\underline{v}_1) := 2\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2$, $L(\underline{v}_2) := -5\underline{w}_1$ $L(\underline{v}_3) := \underline{w}_1 - 2\underline{w}_2$.

Hierdurch ist L vollständig definiert. Ist nämlich $\underline{v} \in R^3$ gegeben, so existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R^3$ mit $\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$, und die λ_i sind eindeutig bestimmt. Da L linear, folgt $L(\underline{v}) = \lambda_1 L(\underline{v}_1) + \lambda_2 L(\underline{v}_2) + \lambda_3 L(\underline{v}_3) = \lambda_1(2\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2) + \ldots$, also

$L(\underline{v} = (2\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3)\underline{w}_1 + (3\lambda_1 - 2\lambda_3)\underline{w}_2$. (*)

$L(\underline{v} = \sum_{i=1}^2 (\sum_{k=1}^3 a_{ik} \lambda_k) \underline{w}_i$: siehe (9).

Es folgt $\underline{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$: Abbildungsmatrix von L bezüglich B und C.

Bemerkung

Achtung: Betrachtet man $\underline{A}$ als Abbildungsmatrix bezüglich einer anderen Basis, so erhält man eine andere lineare Abbildung!

Beispiel 5.9

$\underline{A}$ wie in Beispiel 5.8
Betrachte $\underline{A}$ als Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ von R^3 und $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ von R^2, so erhält man eine andere lineare Abbildung $T : R^3 \to R^2$.
Für $\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ gilt:
$T(\underline{v}) := \underline{A}\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ 3x_1 - 2x_3 \end{pmatrix} = (2x_1 - 5x_2 + x_3)\underline{e}_1 + (3x_1 - 2x_3)\underline{e}_2.$
Sei z.B. $\underline{v} := -\underline{e}_2 + 8\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \in R^3$, dann ist
$T(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \end{pmatrix}$
Zur Berechnung von $L(\underline{v})$ wird der Koordinatenvektor von $\underline{v}$ bezüglich der Basis B benötigt:
$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{v}$, also $1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 = 0$ usw.
Man erhält $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$.
Mit (*) folgt $L(\underline{v}) = (2 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2)\underline{w}_1 + (\ldots)\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \end{pmatrix} \neq T(\underline{v})$

5.3 Der Rang einer Matrix

Definition 5.1

Sei $\underline{A} \in \mathbb{K}^{m \times n} \wedge L_{\underline{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definiert durch $L_{\underline{A}}(\lambda) := \underline{A}\underline{\lambda} \forall \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n$.
Das heißt:

$$Rang(\underline{A}) := Rang(L_{\underline{A}}) = \dim Bild(L_{\underline{A}})$$

Rang der Matrix $\underline{A}$.
Weiter nennt man:
Spaltenrang von Matrix $\underline{A}$:= Die maximale Anzahle linear unabhängiger Spalten von $\underline{A}$.
Zeilenrang von Matrix $\underline{A}$:= Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von $\underline{A}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \mathbf{a}_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$L_{\underline{A}}(\underline{e}_k)$

Bemerkung

Nach 5.2 Bemerkung 1 ist $Bild(L_{\underline{A}}) = Lin$(Spaltenvektoren von $\underline{A}$)

Satz 5.2

Für jede Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt:
$Rang(\underline{A}) = Spaltenrang(\underline{A}) = Zeilenrang(\underline{A})$

Beweis

1. $Rang(\underline{A}) \overset{Def}{=}$ Maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus $L_{\underline{A}}(e_1), ..., L_{\underline{A}}(e_n) = Spaltenrang(\underline{A})$.
2. Behauptung: $Spaltenrang(\underline{A}) = Zeilenrang(\underline{A})$

Erläuterung am Beispiel:

Beispiel 5.1

Sei

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Eine Zeile (Spalte) heißt „linear überflüssig“, wenn sie eine Linearkombination anderer Zeilen (Spalten) ist.
In unserem Beispiel gilt:

$$(-2)(1.Spalte) + (2.Spalte) = 4.Spalte$$

, also ist 4. Spalte überflüssig.

Behauptung 1: Eine Linearkombination der Zeilen von $\underline{A}$ ist genau dann gleich Null, wenn die „linear überflüssigen“ Spalten von $\underline{A} = 0$
Erläuterung am Beispiel:

Beispiel 5.2

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ (-2)(-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}^T + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ (-2)(3) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix}^T + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ (-2)(2) + (1)(2) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}^T + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

Nach Behauptung gilt 1: Zeilenrang($\underline{A}$) = Zeilenrang($\underline{A_1}$). Analog gilt: Weglassen „linear überflüssiger“ Zeilen ändert nicht den Spaltenrang($\underline{A}$).
Durch weglassen überflüssiger Zeilen und Spalten $\underline{A}$ reduzieren zu einer Matrix $\underline{A}^*$ ohne linear überflüssiger Zeilen und Spalten. Es getle dann:

$$Spaltenrang(\underline{A}) = Spaltenrang(\underline{A}^*) = Spaltenanzahl(\underline{A}^*)$$

$$Zeilenrang(\underline{A}) = Zeilenanzahl(\underline{A}^*)$$

Wäre $\underline{A}^* \in \mathbb{K}^{m_1 \times n_1}$ und z.B. $m_1 < n_1$, dann wären die n_1 Spaltenvektoren von $\underline{A}^*$ im Raum $\mathbb{K}^{m_1}$ linear unabhängig. $\Rightarrow$ Widerspruch, da $dim\mathbb{K}^{m_1} = m_1 < n_1$. Somit $m_1 = n_1$, also $\underline{A}^*$ quadratisch. Daraus folgt:

$$Spaltenrang(\underline{A}) = Zeilenrang(\underline{A})$$

■

5.3.1 Verfahren zur Bestimmung von $Rang(\underline{A})$

$\underline{A}$ durch EZU überführen in Zeilenstufenform $\widetilde{\underline{A}}$ (siehe 2.2)

$$\widetilde{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & & & & & & \\ 0 & a_{2k_2} & & * & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rk_r} & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{1k_1}, ..., a_{rk_r} \neq 0$
$* =$ beliebige Elemente
Dann gilt:

$\boxed{Rang(\underline{A}) \overset{\text{Satz 1}}{=} Rang(\widetilde{\underline{A}}) = r}$

Beispiel 5.3

Gesucht ist $Rang(\underline{A})$ für

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\underline{A}}$$

$Rang(\underline{A}) = Rang(\widetilde{\underline{A}}) = 2$

5.4 Invertierbare Matrizen

Definition 5.1

Sei E die (n,n)-Einheitsmatrix.
Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (also A quadratisch) heißt invertierbar, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert, sodass $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{E}$. Die Matrix $\underline{B}$ ist eindeutig bestimmt (Beweis ist Übungsaufgabe). Man schreibt $\underline{B} := \underline{A}^{-1}$.
Man nennt $\underline{A}^{-1}$ zu $\underline{A}$ <u>inverse Matrix</u> (Kehrmatrix).
Also gilt: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$ (1)
$GL(n, \mathbb{K}) := \{\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n} : \underline{A} \text{ ist invertierbar}\}$
(General Linear Group)

Satz 5.2

$GL(n, \mathbb{K})$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine (im Allgemeinen nicht abelsche) Gruppe, mit $\underline{E}$ als neutrales Element. Für $\underline{A}, \underline{B} \in GL(n, \mathbb{K})$ gilt: $(\underline{AB})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$ (2)

Beweis (Gleichung 2)

$(\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1})(\underline{AB}) = \underline{B}^{-1} \underbrace{(\underline{A}^{-1}\underline{A})}_{=\underline{E}} \underline{B} = \underline{B}^{-1} \underbrace{(\underline{EB})}_{=\underline{B}} = \underline{B}^{-1}\underline{B} = \underline{E}$

Analog $(\underline{AB})(\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}) = \underline{E}$
RAR Die zu $\underline{AB}$ inverse Matrix $(\underline{AB})^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{B}^{-1}$

■

Für $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sei $L_{\underline{A}}(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda}\ \forall \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n$

Satz 5.3

Für $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) $\underline{A}$ ist invertierbar

(b) $\exists \underline{B} \in \mathbb{K}^{n\times n} : \underline{A} - \underline{B} = \underline{E}$

(c) $\exists \underline{C} \in \mathbb{K}^{n\times n} : \underline{C} \cdot \underline{A} = \underline{E}$

(d) $\operatorname{Rang} \underline{A} = n$

(e) $L_{\underline{A}} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ ist ein Isomorphismus.

Gilt (e) und somit (a), dann ist $\underline{A}^{-1}$ die Abbildungsmatrix der Umkehrfunktion. $L_{\underline{A}^{-1}}$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{K}^n$.

Beweis

$(b) \Rightarrow (e)$ Behauptung: $L_{\underline{A}}$ ist surjektiv.

Sei $y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt $L_{\underline{A}}(\underline{By}) = \in A(\underline{By}) = (\in A\underline{B})\underline{y} \overset{(b)}{=} \underline{Ey} = \underline{y}$.
Das heißt für $\underline{x} := \underline{By} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow L_{\underline{A}}(\underline{x}) = \underline{y}$
Da (*) beliebig war, ist $L_{\underline{A}}$ surjektiv.
Also ist $L_{\underline{A}}$ auch injektiv (siehe 5.1). Somit ist $L_{\underline{A}}$ ein Isomorphismus.

$(e) \Rightarrow (a)$ Sei $\underline{B}$ eine Abbildungsmatrix von $L_{\underline{A}}^{-1}$.
Für jedes $y \in \mathbb{K}^n$ gilt:
$\underline{x} = \underline{By} = L_{\underline{A}}^{-1}(y) \Leftrightarrow L_{\underline{A}}(\underline{x}) - L_{\underline{A}}\left(L_{\underline{A}}^{-1}(y)\right) = \underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = L_{\underline{A}}(\underline{x}) = \underline{Ax}$, also
$\underline{Ey} = \underline{y} = \underline{Ax} = \underline{A}(\underline{By}) = (\underline{AB})\underline{y}$.
Mit $\underline{y} = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \in \mathbb{K}^n$ folgt: Alle Spalten von $\underline{E}$ stimmen mit den Spalten von $\underline{AB}$ überein, also $\underline{E} = \underline{AB}$.
Analog gilt für jedes $\underline{\in}\mathbb{K}^n : \underline{y} = \underline{Ax} = L_{\underline{A}}(\underline{x}) \Leftrightarrow L_{\underline{A}}^{-1}(\underline{y}) = \underline{By}$.
$\underline{Ex} = \underline{x} = \underline{B}(\underline{Ax}) = (\underline{BA})\underline{x} \overset{\text{(wie oben über Spaltenvektoren)}}{\Rightarrow} \underline{E} = \underline{BA}$.
$\Rightarrow \underline{A}$ ist invertierbar und es gilt $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$.

Analog für die übrigen Aussagen.

■

Beispiel 5.1

Zu $\underline{E} = (\underline{AB})\underline{y}\ \forall \underline{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Nun $\underline{y} = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. Hier für $\underline{e}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{c32} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Spalten gleich $\Rightarrow$ Matrix gleich.

5.4.1 Untersuchung auf Invertierbarkeit

Definition 5.4

Die quadratische Matrix $\underline{D} = (d_{ik})$ heißt <u>obere Dreieckmatrix</u>, wenn d_{ik} für $i > k$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \underline{d_{11}} & d_{12} & d_{13} & \cdots \\ 0 & \underline{d_{22}} & d_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & \underline{d_{33}} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

d_{ii}: Diagonalelemente

Satz 5.5

Jede Quadratische Matrix $\underline{A}$ kann durch EZU von Typ 1 und/oder Typ 3 in eine obere Dreieckmatrix überführt werden. Es gilt:
$\underline{A}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ Alle Diagonalelemente von $\underline{D}$ sind ungleich 0.

Beweis
Umformung $\underline{A} \to \underline{D}$ (siehe 2.2/Satz 1)
Invertierbarkeit:

(a) Gelte $d_{ii} \neq 0\ \forall i = 1, \ldots, n$. Ist nun λ_1(erste Zeile von $\underline{D}$)+$\lambda_2$zweite Zeile von $\underline{D}$+...+λ_n(n-te Zeile von $\underline{D}$) = 0 (*)
$\lambda_1(d_{11}, d_{12}, d_{13}, ...) + \lambda_2(0, d_{22}, d_{23}, ...) + ... + \lambda_n(0, ..., d_{nn}) = (0, ..., 0)$, dann folgt:
$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$
Also ist Zeilenrang von $\underline{D} = n$ und somit Rang($\underline{A}$) = Rang($\underline{B}$) $= n$. Nach Satz 2 ust $\underline{A}$ invertierbar.

(b) Gelte $d_{11} \neq 0, ..., d_{r-1,r-1} \neq 0$, aber $d_{r,r} = 0$
Aus (*) folgt dann $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{r-1} = 0$, aber λ_r kann z.B. $d = 1$ gewählt werden.

■

5.4.2 Verfahren zur Berechnung von $\underline{A}^{-1}$

$\boxed{\underline{A} \mid \underline{E}}$
↓ EZU
$\boxed{\underline{E} \mid \underline{A}^{-1}}$

Satz 5.6

Gegeben sei eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\underline{B}, \underline{C} \in \mathbb{K}^{n \times p}$. Es gilt $\underline{AC} = \underline{B}$. Entstehen $\underline{\widetilde{A}}$ und $\underline{\widetilde{B}}$ aus <u>den selben</u> EZU, so gilt: $\underline{\widetilde{A}C} = \underline{\widetilde{B}}$.

$\boxed{\underline{A} \mid \underline{B}}$ $\underline{AC} = \underline{B}$
↓ EZU
$\boxed{\underline{\widetilde{A}} \mid \underline{\widetilde{B}}}$ $\underline{\widetilde{A}C} = \underline{\widetilde{B}}$
Schema 1

Beweis zum Beweis EZU Typ 1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{B}=\underline{A}\underline{C}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}}_{\underline{\widetilde{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \\ a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \end{pmatrix}}_{\underline{\widetilde{B}}=\underline{\widetilde{A}}\underline{C}}$$

■

$\boxed{\underline{A} \mid \underline{E}}$ $\underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{E}$
↓ EZU
$\boxed{\underline{E} \mid \underline{A}^{-1}}$ $\underline{E}\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}$
Schema 2

5.4.3 Verfahren zur Berechnung von $\underline{A}^{-1}$ (Schema 2)

1. Notiere $\underline{A}$ und $\underline{E}$ wie in Schema 2. Wende alle folgenden Umformung auf beide Matrizen an.
2. Überführe $\underline{A}$ durch EZU in eine obere Dreieckmatrix $\underline{D}$.

Fall 1	Fall 2
Sind die ersten Diagonalelemente $\underline{D}$ gleich 0. $\underline{A}$ ist nicht invertierbar	Fall 1 tritt nicht ein. $\underline{D}$ kann durch EZU rückwärts (von unten nach oben) in $\underline{E}$ überführt werden. Rechts steht dann $\underline{A}^{-1}$.

Beispiel 5.2

Gesucht: $\underline{A}^{-1}$ von $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ll}
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & \mid 1 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \downarrow & \\
-1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & (+) & \\
\hline
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \mid -5 & \\
0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & (+) & \\
\hline
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & & \uparrow \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \uparrow & \uparrow \\
0 & 0 & -10 & 1 & -5 & 1 & \mid \frac{1}{5} & \mid -\frac{1}{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & & \\
0 & 0 & -10 & 1 & -5 & 1 & \mid -\frac{1}{10} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & &
\end{array}$$

Beispiel 5.3 Betrachte Drehmatrix

$\underline{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\underline{D}_\varphi \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mapsto \underline{A}_\varphi \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ beschreibt Drehung um Winkel φ

Ist die Drehmatrix invertierbar?

$$\begin{array}{cc|cc l}
\cos\varphi & -\sin\varphi & 1 & 0 & \mid \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \\
\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 1 & \overset{(+)}{\hookleftarrow} \\
\hline
\cos\varphi & -\sin\varphi & 1 & 0 & \Lsh \\
0 & \frac{1}{\cos\varphi} & -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} & 1 & \mid \sin\varphi\cos\varphi
\end{array}$$

Fall 1 $\cos\varphi \neq 0$, also $\varphi \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Da $d_{11} = \cos\varphi \neq 0$ und $d_{22} \neq 0$, ist $\underline{A}_\varphi$ in diesem Fall invertierbar.

Fall 2 $\cos\varphi = 0, \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{cc|cc l}
\cos\varphi & -\sin\varphi & 1 & 0 & \downarrow \\
\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 1 & \uparrow \\
\hline
\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 1 & \mid -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \\
\cos\varphi & -\sin\varphi & 1 & 0 & \hookleftarrow \\
\hline
\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 1 & \\
0 & -\frac{1}{\sin\varphi} & 1 & -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Invertierbar

$$\underline{A}_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \underline{A}_{-\varphi}$$

5.4.4 Lösen einer Matrixgleichung

Gegeben: $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \underline{B} \in \mathbb{K}^{n\times r}$
Gesucht: $\underline{X} \in \mathbb{K}^{n\times r} : \underline{AX} = \underline{B}$
Lösung: Ist $\underline{A}$ invertierbar, dann gilt:

$$\underline{AX} = \underline{B} \Leftrightarrow \underline{A}^{-1}(\underline{AX}) = \underline{A}^{-1}\underline{B} \Leftrightarrow (\underbrace{\underline{AA}^{-1}}_{\underline{E}})\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B} \Leftrightarrow \underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$$

Durch Anwendung von Schema 1 mit $\underline{C} = \underline{X}$ folgt:

$\boxed{\underline{A} \mid \underline{B}}$
$\downarrow$ EZU
$\boxed{\underline{E} \mid \underline{X}}$ $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

5.5 Basiswechsel

Betrachte in $\mathbb{K}^n$ die Standardbasen $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ und eine weitere Basis $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ gelte:

$$\underline{x} = \xi_1\underline{e}_1 + \ldots + \xi_n\underline{e}_n = \tilde{\xi}_1\underline{b}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n\underline{b}_n$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ ist der Koordinatenvektor von $\underline{x}$ bezüglich $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$\underline{\widetilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}$ ist der Koordinatenvektor von $\underline{x}$ bezüglich $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

Gesucht: ist der Zusammenhang zwischen $\underline{x}$ und $\underline{\widetilde{x}}$

Lösung: Sei $\underline{B} := (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ (1)

Hierbei sei $\underline{b}$ als Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis als i-te Spalte notiert $(i = 1, \dots, n)$.

$$\text{Ist } \underline{b}_1 := \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix}, ..., \underline{b}_n := \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{nn} \end{pmatrix}, \text{ dann } \underline{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Da $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ eine Basis ist, sind die Vektoren linear unabhängig. Also gilt: Rang$(\underline{B}) = n$. Daher existiert $\underline{B}^{-1}$ (siehe 5.4/Satz 2).

$$\underline{B\widetilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1\beta_{11} + ... + \tilde{\xi}_n\beta_{1n} \\ \tilde{\xi}_1\beta_{n1} + ... + \tilde{\xi}_n\beta_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{\xi}_1\underline{b}_1 + ... + \tilde{\xi}_n\underline{b}_n = \underline{x}$$

Also gilt: $\underline{x} = \underline{B\widetilde{x}}$ und $\underline{\widetilde{x}} = \underline{B}^{-1}\underline{x}$ (2)

Beispiel 5.1

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, weiter sei $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ die aus $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ durch Drehung um $\varphi = -\frac{1}{4}$ entstehende Basis.

Mit Drehmatrix: $\underline{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos -\frac{1}{4} & -\sin -\frac{1}{4} \\ \sin -\frac{1}{4} & \cos -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\underline{b}_1 = \underline{A}_\varphi \underline{e}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \underline{A}_\varphi \underline{e}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) = \underline{A}_\varphi \text{ und daher } \underline{B}^{-1} = \underline{A_\varphi}^{-1} = \underline{A}_\varphi,$$

$$\text{also } \underline{B}^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist z.B. $\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2$. Dann folgt:

$$\underline{\widetilde{x}} \overset{(2)}{=} \underline{B}^{-1}\underline{x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ also } \underline{x} = \sqrt{2}\underline{b}_1 + 2\sqrt{2}\underline{b}_2$$

Nun sei $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $\underline{A}$ bezüglich $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$, d.h. $L(\underline{x}) = \underline{Ax} \; \forall \in x \in \mathbb{K}^n$

Gesucht: Abbildungsmatrix $\underline{\widetilde{A}} = (\tilde{\alpha}_{ik})$ von L bezüglich $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

Lösung: Nach 5.2/Satz 2 (mit $V = W := \mathbb{K}^n$ und $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 := \underline{b}_1$) gilt:

$$L(\underline{x}) = L(\tilde{\xi}_1\underline{b}_1 + ... + \tilde{\xi}_n\underline{b}_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\alpha}_{ik}\tilde{\xi}_k\right)\underline{b}_1$$

Der Koordinatenvektor von $L(\underline{x})$ bezüglich $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ ist

$$\widetilde{L(\underline{x})} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\alpha}_{1k}\tilde{\xi}_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\alpha}_{nk}\tilde{\xi}_k \end{pmatrix} = \underline{\widetilde{A}\widetilde{x}} \qquad (*)$$

Es folgt:

$$\underline{\widetilde{A}\widetilde{x}} = \widetilde{L(\underline{x})} \overset{(2)}{=} \underline{B}^{-1}(L(x)) = \underline{B}^{-1}(\underline{Ax}) = (\underline{B}^{-1}\underline{A})\underline{x} \overset{(2)}{=} \underline{B}^{-1}\underline{A}(\underline{B\widetilde{x}}) = (\underline{B}^{-1}\underline{AB})\underline{\widetilde{x}}$$

Dies gilt für alle $\underline{\widetilde{x}} \in \mathbb{K}^n$, daher folgt:
$\underline{\widetilde{A}} = \underline{B}^{-1}\underline{AB} \qquad (3)$
<u>Beachte:</u> Nach (*) ist die k-te Spalte von $\underline{\widetilde{A}}$ der Koordinatenvektor von $L(\underline{b}_k)$ bezüglich der Basis $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$!

Beispiel 5.2

Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ und $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Projektionsabbildung:
$L(\xi_1\underline{e}_1 + \xi_2\underline{e}_2 + \xi_3\underline{e}_3) := \xi_1\underline{e}_1 + \xi_2\underline{e}_2$

Nach 5.2/Beispiel 1 ist die Abbildungsmatrix $\underline{A}$ von L : $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Für $\underline{B} \overset{(1)}{=} (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\widetilde{A}} \overset{(3)}{=} \underline{B}^{-1}\underline{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ist Abbildungsmatrix von L bezüglich $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$

Ist z.B. $\underline{x} = 3\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + 2\underline{b}_3$, also $\underline{\widetilde{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dann folgt:

$\widetilde{L(\underline{x})} = \underline{\widetilde{A}\widetilde{x}} = (5, 1, 0)^T$, dass heißt es gilt $L(\underline{x}) = 5\underline{b}_1 + \underline{b}_2$.
Bisher: $\mathbb{K}^n$ mit $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ und $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

<u>Verallgemeinerung:</u>

Satz 5.1 Basiswechsel in V

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Basen $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ und $(\underline{\widetilde{v}}_1, \ldots, \underline{\widetilde{v}}_n)$. Weiter sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung. Es gelte:

$\underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n$ =Koordinatenvektor von $\underline{v} \in V$ bezüglich der Basis $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ (4)

$\underline{\widetilde{\lambda}} \in \mathbb{K}^n$ =Koordinatenvektor von $\underline{v} \in V$ bezüglich der Basis $(\underline{\widetilde{v}}_1, \ldots, \underline{\widetilde{v}}_n)$ (5)

$\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ =Abbildungsmatrix von L bezüglich der Basis $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ (6)

$\underline{\widetilde{A}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ =Abbildungsmatrix von L bezüglich der Basis $(\underline{\widetilde{v}}_1, \ldots, \underline{\widetilde{v}}_n)$ (7)

$\underline{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ =Matrix, deren k-te Spalte der Koordinatenvektor von $\underline{\widetilde{v}}_k$ bezüglich $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ für $k = 1, \ldots, n$

Dann gilt: $\underline{\widetilde{\lambda}} = \underline{B}^{-1}\underline{\lambda}, \underline{\lambda} = \underline{B}\underline{\widetilde{\lambda}}$ (vergleich (2)) (8)

Weiter gilt: $\underline{\widetilde{A}} = \underline{B}^{-1}\underline{AB}$ (vergleich (3)) (9)

(4) bedeutet: $\underline{v} = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, d.h. $\underline{\lambda} = \Phi^{-1}(\underline{v})$, wobei Φ ein kanonischer Isomorphismus bezüglich der Basis $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ ist.

(6) bedeutet: $\underline{A} = (\alpha_{ik})$ und es gelte:

$$L(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\lambda_k \right) v_i \tag{10}$$

Mit $\underline{w} = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$ und $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ gilt:

$L(\underline{v}) = \underline{w} \overset{(10)}{\Leftrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\lambda_k = \mu_i \quad (i = 1, \ldots, n)$, also:

$$L(\underline{v}) = \underline{w} \Leftrightarrow \underline{A\lambda} = \underline{\mu} \tag{11}$$

Analog für n Größen.

6 Determinanten

6.1 Definition der Determinante

Definition 6.1

Für $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2) := \{\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 : 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1\}$$

von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ aufgespanntes Parallelogramm.

Gesucht: Eine Funktion $D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die den Flächeninhalt von $P(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ beschreibt.

Sinnvolle Forderung:

(d1) $D(\lambda \underline{a}_1, \underline{a}_2) = \lambda D(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$
$D(\underline{a}_1, \lambda \underline{a}_2) = \lambda D(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$
$D(\underline{a}_1 + \underline{b}, \underline{a}_2) = D(\underline{a}_1, \underline{a}_2) + D(\underline{b}, \underline{a}_2)$
$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2 + \underline{b} = D(\underline{a}_1, \underline{a}_2) + D(\underline{a}_1, \underline{b})$

(d2) $D(\underline{a}_1, \underline{a}_2) = 0 \Leftrightarrow \underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ linear abhängig.

(d3) $D(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$ (Normierung)

Man kann zeigen: Es existiert genau eine Funktion D, nämlich

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ wobei } \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Weiter gilt:

$$|D(\underline{a}_1, \underline{a}_2)| \overset{(*)}{=} |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| \overset{\text{(Geometrie)}}{=} |\underline{a}_1| \underbrace{|\underline{a}_2| \sin \gamma}_{=h}$$

$|D(\underline{a}_1, \underline{a}_2)|$ =Flächeninhalt von $P(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ (**)

Beachte:

zu $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ gehört die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. $\underline{a}_i^T = (a_{i1}, a_{i2})$ =i-te Zeile von $\underline{A}$.

Definition 6.2

Für $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sei $\underline{a}^T := \{a_{i1}, ..., a_{in}\}$ die i-te Zeile.

Also $\underline{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$ Eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ heißt linear in jeder Zeile, wenn gilt:

- Ist $\underline{a}_i^T = \underline{b}_i^T + \underline{c}_i^T$, dann gilt $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i^T \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i^T \\ \vdots \end{pmatrix}$
- Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt: $\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i^T \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \end{pmatrix}$, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Definition und Satz 6.3

Es gibt genau eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

(D1) det ist linear in jeder Zeile

(D2) Ist (Zeilen-)Rang $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n} < n$, dann ist $\det \underline{A} = 0$

(D3) $\det \underline{E} = 1$

Diese Abbildung det heißt Determinante (die Zahl $\det \underline{A}$ heißt Determinante von $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$)

Vorbereitung des Beweises:

Lemma 6.4

Es sei $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1) und (D2). Geht nun $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ durch EZU in $\widetilde{\underline{A}}$ über, so gilt:

Typ 1 (Vertauschen zweier Zeilen): $\det \widetilde{\underline{A}} = -\det \underline{A}$

Typ 2 (Multiplikation mit $\lambda \neq 0$): $\det \widetilde{\underline{A}} = \lambda \det \underline{A}$

Typ 3 (λ- faches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren): $\det \widetilde{\underline{A}} = \det \underline{A}$

Beweis des Lemmas

Typ 2 Folgt aus (D1)

Typ 3 Erläuterung am Spezialfall:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \lambda \\ \overset{(+)}{\hookleftarrow} \\ \end{matrix} \to \widetilde{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Betrachte außerdem: $\underline{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \vdots & \end{pmatrix}$.

Dann sind zwei Zeilen von $\underline{A}'$ linear abhängig, also $\operatorname{Rang}(\underline{A}') < n \overset{(D1)}{\Rightarrow} \det \underline{A}' = 0$
Hiermit ergibt sich:

$$\det \widetilde{\underline{A}} \overset{(D1)}{=} \det \underline{A} + \det \underline{A}' = \det \underline{A}$$

Typ 1

$$\det \begin{pmatrix} a_i^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_k^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_i^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix}}_{=0 \text{ (D1)}} + \det \begin{pmatrix} a_i^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_k^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_k^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_i^T + a_k^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_i^T + a_k^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_i^T + a_k^T \\ \vdots \\ a_i^T + a_k^T \end{pmatrix} = 0, \text{ also } \det \begin{pmatrix} a_i^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_k^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix}$$

■

Beweis des Satzes
Eindeutigkeit:

Angenommen, es gibt zwei Abbildungen det und det′, die (D1) bis (D3) erfüllen.
zu zeigen: $\det \underline{A} = \det' \underline{A} \ \forall \underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$
Ist $\operatorname{Rang}(\underline{A}) < n \Rightarrow \det \underline{A} = \det' \underline{A} = 0$ (D2)
Nun: $\operatorname{Rang}(\underline{A}) = n$. Dann kann $\underline{A}$ durch EZU Typ 1, Typ 2 (Multiplikation mit $\lambda \neq 0$) und Typ 3 in $\underline{E}$ umgeformt werden (siehe 5.4). Mit Lemma 1 folgt:

$$1 = \underline{E} = \pm\lambda \det \underline{A} \text{ und } 1 = \det' \underline{E} = \pm\lambda \det' \underline{A}$$

$$\text{aus } \lambda \neq 0 \text{ folgt } \det \underline{A} = \det' \underline{A}$$

Existenz:

Beweis durch vollständige Induktion bezüglich n:

- Induktionsanfang: $n = 1$
  $\underline{A} = (a)$, wobei $a \in \mathbb{K}$. Man setzt: $\det \underline{A} = a$. Offenbar sind (D1) bis (D3) erfüllt.
- Induktionsvoraussetzung: Sei $\det \underline{B} \ \forall \underline{B} \in \mathbb{K}^{n-1 \times n-1}$ definiert

- Induktionsschritt: Sei $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Sei $\underline{A}_{ij}$ die aus $\underline{A}$ durch streichen der i-ten Zeilen und der j-ten Spalte entstehende $(n-1, n-1)$. Matrix.

Beispiel 6.1

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cancel{a}_{11} & \cancel{a}_{12} & \cancel{a}_{13} & \cdots \\ a_{21} & \cancel{a}_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & \cancel{a}_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}, \text{ dann } \underline{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\det \underline{A}_{ij}$ definiert. Hiermit erhält man:

$$\det \underline{A} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det \underline{A}_{ij} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ j-te Spalte}$$

(1) Entwicklung von $\det \underline{A}$ nach der j-ten Spalte.
Induktionsbehauptung: Für $\det \underline{A}$ gemäß (1) gelten (D1) bis (D3):

zu (D1): Erläuterung am Spezialfall
Entwicklung vo $\det \underline{A}$ nach der 2- Spalte (Also $j = 2$)

$$\det \underline{A} \overset{(1)}{=} (-1)^{1+2} a_{12} \det \underline{A}_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} \det \underline{A}_{22} + \ldots \qquad *)$$

Liniarität von $\underline{A} \mapsto \det \underline{A}$ bezüglich der ersten Zeile:
Sei $a_{11} = b_{11} + c_{11}, \quad a_{12} = b_{12} + c_{12}, \ldots$

(a)

$$(-1)^{1+2} a_{12} \det \underline{A}_{12} = (-1)^{1+2} (b_{12} + c_{12}) \det \underline{A}_{12} = (-1)^{1+2} b_{12} \det \underline{A}_{12} + (-1)^{1+2} c_{12} \det \underline{A}_{12}$$

Beachte: a_{12} hängt nicht von 1. Zeile ab.

(b) $(-1)^{2+2} a_{22} \det \underline{A}_{22}$: a_{22} hängt nicht von 1. Zeile ab, aber die Matrix $\underline{A}_{22}$

$$\underline{A}_{22} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{13} + c_{13} & \cdots \\ b_{31} + c_{31} & b_{33} + c_{33} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\det \underline{A}_{22}$ linear bezüglich neuer erster Zeile.

Analog für die zweiten Summanden in (*). Hiermit folgt die Liniarität von $\det \underline{A}$ bezüglich der ersten Zeile. Für alle anderen Zeilen analog.
(D2) und (D3): ohne Beweis

■

Satz 6.5

Für $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt die Leibnizformel.

$$\det \underline{A} = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}(\tau) a_{\tau(1),1} \cdot,,, \cdot a_{\tau(n),n} \qquad (2)$$

(ohne Beweis)

Bemerkung

Hierbei ist S_n die Gruppe der Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$. Ist $\tau \in S_n$, dann $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$
Gilt $i < k \Rightarrow \tau(i) > \tau(k)$, so heißt dies Ordnungswidrigkeit von τ. Man nennt:

$$\operatorname{sign}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Anzahl der Ordnungswidrigkeiten von } \tau \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl der Ordnungswidrigkeiten von } \tau \text{ ungerade ist} \end{cases}$$ Signum von Tau

Beispiel 6.2

$\tau \in s_4, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Zwei Ordnungswidrigkeiten $\Rightarrow \operatorname{sign}(\tau) = +1$

$$\text{Sei } \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{sign}(\tau) = +1, \quad \operatorname{sign}(\tau) = -1$
Nach (2) gilt:

$$\det \underline{A} = 1 a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} + (-1) a_{\tau'(1),1} a_{\tau'(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

6.2 Berechnung von Determinanten

Nach (6.1(1)) gilt: $\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \underline{A}_{ij}$, wobei $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times}$.

$n = 1 \ \det(a) = a$

$$n = 2 \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

$$n = 3 \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Nun (1) anwenden.

Lemma 6.1

Für jede Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $\det \underline{A}^T = \det \underline{A} \qquad (2)$

Beweis
Sei $\det^T(\underline{A}) := \det \underline{A}^T \ \forall \underline{A} \in \mathbb{K}$. Hiermit ist $\det^T : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ definiert.
Wegen *Zeilenrang = Spaltenrang* gilt $\operatorname{Rang} \underline{A}^T = \operatorname{Rang} \underline{A}$.
Also gilt (D2) für $\det^T$. Bedingung (D3) wegen $\underline{E}^T = \underline{E}$ erfüllt.
(D1): $\underline{A} \mapsto \det \underline{A}^T$ linear in jeder Zeile, d.h $\underline{A} \mapsto \det \underline{A}^T$ linear in jeder Spalte (folgt aus Entwicklungsformel (6.1(1)).
$\Rightarrow \det^T$ hat die Eigenschaft: (D1),(D2) und (D3).
Wegen 6.1(1)(Eindeutigkeit) folgt $\det^T \underline{A} = \det \underline{A}$.

■

Satz 6.2 Entwicklungssatz

Man kann $\det \underline{A}, \underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ durch Entwicklung nach einer beliebigen Spalte oder einer beliebigen Zeile berechnen.

Beweis folgt aus 6.1 Satz 1 und dem Lemma

Beispiel 6.1

Gesucht: $\det \underline{A}$ für:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -2(2-12) = 20$$

Vorzeichen nach Schachbrettmuster: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Beispiel 6.2

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = d_{33} \det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} = d_{33}(d_{11}d_{22})$$

Lemma 6.3

Ist $\underline{D} = (d_{ik})$ eine obere Dreiecksmatrix, so gilt: $\det \underline{D} = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$.

Beweis ist analog zu Beispiel 2.

6.2.1 Effektives Verfahren zur Berechnung von $\det \underline{A}$

Überführe $\underline{A}$ durch EZU vom Typ 1 und/oder Typ 3 in eine obere Dreiecksmatrix $\underline{D} = (d_{ik})$ (siehe 5.4 Satz 3).
Werden hierfür r Zeilenvertauschungen (EZU Typ 1) vorgenommen, so gilt (siehe 6.1 Lemma 1):
$\det \underline{A} = (-1)^r \det \underline{D} = (-1)^r \prod_{i=1}^{n} d_{11}$ (3)

Beispiel 6.3

Gesucht ist $\det \underline{A}$ für:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{(Typ1, r=1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |-3 \\ \\ \overset{(+)}{\hookleftarrow} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |-4 \\ \overset{(+)}{\hookleftarrow} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{D}$$

$\det \underline{A} = -6$

6.3 Determinanten und inverse Matrizen

Satz 6.1 Ergänzung zu 5.4/Satz 2

Für $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind äquivalent

(a) $\underline{A}$ ist invertierbar

(b) $\det \underline{A} \neq 0$

Gilt (a) und somit (b), dann ist $\det \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}}$ (1)

Beweis

$(b) \Rightarrow (a)$ gelte (b). Angenommen $\underline{A}$ ist **nicht** invertierbar.
Dann $\operatorname{Rang} \underline{A} < n$ (siehe 5.4/Satz 2), also $\det \underline{A} = 0$ (siehe 6.1/Satz 1) $\Rightarrow$ Widerspruch zu (b)

$(a) \Rightarrow (b)$ gelte (a). Ist $\underline{A}$ invertierbar, so kann $\underline{A}$ durch EZU in $\underline{E}$ überführt werden (siehe 5.4/Verfahren).
Nach Lemma 1 ist $\det \underline{A} = \pm \underline{E} = \pm$, wobei $\lambda \neq 0$. Somit ist $\det \underline{A} \neq 0$.

■

Beweis zu (1) folgt unten

Satz 6.2 Multiplikationssatz

Für $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\det(\underline{AB}) = \det \underline{A} \det \underline{B}$ (2)

Beweis
Sei $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$. $f(\underline{A}) = \det(\underline{AB})\ \forall \underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$
Hierbei sei $\underline{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ fest. Weiter sei $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch:

$$L_A(\underline{\lambda}) = \underline{A\lambda}\ \forall \underline{\lambda} \in \mathbb{K}^n$$

1. Mit (D1) folgt: f ist linear in den Zeilen von $\underline{A}$.
2. Aus $L_{AB} = L_A L_B$ (siehe Übungsaufgabe) folgt $\operatorname{Bild}(L_{AB}) \leq \operatorname{Bild}(L_A)$ und daher

$$\operatorname{Rang}(\underline{AB}) := \dim \operatorname{Bild}(L_{AB}) \leq \dim \operatorname{Bild}(L_A) = \operatorname{Rang}(\underline{A})$$

   Ist $\operatorname{Rang} \underline{A} < n$, dann auch $\operatorname{Rang}(\underline{AB}) < n$, also $f(\underline{A}) = \det(\underline{AB}) = 0$ (D2)
3. $f(\underline{E}) = \det(\underline{EB}) = \det \underline{B}$
   (a) Ist $\det \underline{B} \neq 0$, dann folgt $\left(\frac{1}{\det \underline{B}} f\right)(\underline{E}) = 1$
   Für $\frac{1}{\det \underline{B}} f$ gelten die Eigenschaften (D1) bis (D3)
   nach 6.1/Satz 1 ist $\frac{1}{\det \underline{B}} f = \underline{A} = \det \underline{A}\ \forall \underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, d.h. es gilt (2)
   (b) Nun sei $\det \underline{B} = 0$. B nicht invertierbar (siehe Satz 1), also gilt $\dim \operatorname{Bild}(L_B) = \operatorname{Rang} \underline{B} < n$ (siehe 5.4/Satz 2)
   Dimensionsformel:

$$\dim \operatorname{Kern}(L_B) + \underbrace{\operatorname{Rang}(L_B)}_{=\operatorname{Rang}(\underline{B})} = \dim \mathbb{K}^n = n \text{ (siehe 5.1/Theorem)}$$

   Hiermit folgt: $\dim \operatorname{Kern}(L_B) > 0$ und daraus $\dim \operatorname{Kern}(L_{AB}) > 0$ (weil $\operatorname{Kern}(L_B) \subset \operatorname{Kern}(L_{AB})$). Wieder nach Dimensionsformel folgt:

$$\operatorname{Rang}(\underline{AB}) = \dim \operatorname{Bild}(L_{AB}) < n \text{ und somit } \det(\underline{AB}) = 0 \qquad \text{(D2)}$$

   Also gilt (2) auch in diesem Falle

■

Beweis Formel (1)

$$\det \underline{A} \det \underline{A}^{-1} \overset{(2)}{=} \det(\underline{AA}^{-1}) = \det(\underline{E}) = 1$$

■

6.4 Determinanten eines Endomorphismus

Definition 6.1

Eine lineare Abbildung $L : V \to V$ (also von V in sich) heißt Endomorphismus von V.

Definition und Satz 6.2

Sei V ein $\mathbb{K}$- Vektorraum mit den Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$.
Weiter sei $L : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Abbildungsmatrix $\underline{A}$ bezüglich $(v_1, \dots, v_n)$ und $\underline{\widetilde{A}}$ bezüglich $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$.
Dann gilt $\det \underline{\widetilde{A}} = \det \underline{A}$ (1)
Diese von der Wahl der Basis unabhängige Zahl heißt Determinante des Endomorphismus L. $\det L := \det \underline{A}$

Beweis Formel (1)

Nach 5.5/Satz 1 gilt: $\underline{\widetilde{A}} = \underline{B}^{-1}\underline{AB}$ mit (invertierbarer) Matrix $\underline{B}$. Es folgt mit 6.3 (Satz 2/1):

$$\det \underline{\widetilde{A}} = \det \underline{B}^{-1} \det \underline{A} \det \underline{B} = \det \underline{A}$$

■

7 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben: $\underline{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$
Gesucht: $\underline{X} = (x_k) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\underline{Ax} = \underline{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

m : Anzahl der Gleichungen
n : Anzahl der Variablen

Betrachte neben $\underline{Ax} = \underline{b}$ (inhomogenes Gleichungssytem falls $b \neq 0$) auch $\underline{Ax} = 0$ (homogenes Gleichungssytem)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ heißt Koeffizientenmatrix}$$

$$(\underline{A}|\underline{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ erweiterte Koeffizientenmatrix}$$

Theorem 7.3

(i) (Lösbarkeitskriterium)
$\underline{Ax} = \underline{b}$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ Rang$(\underline{Ab})$ = Rang$(\underline{A})$ (*)
(Rangbedingung)

(ii) (Lösungsdarstellung)
Es gelte (*), sei $\underline{x}_S \in \mathbb{R}^n$ eine (spezielle) Lösung von $\underline{Ax} = \underline{b}$. Dann gibt es zu jeder Lösung $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\underline{Ax} = \underline{b}$ eine Lösung $x_k \in \mathbb{R}^n$ von $\underline{Ax} = \underline{o}$, so dass gilt: $\underline{x} = \underline{x}_S + \underline{x}_k$

(iii) (Lösungsvielfalt)
Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $\underline{Ax} = \underline{o}$ ist $p := n - \text{Rang}(\underline{A})$, die Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichungssyteme $\underline{Ax} = \underline{o}$ ist also ein p-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

Beweis
Sei $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit Standardbasen gegeben. Definieren wir eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $L(\underline{x}) = \underline{Ax}\ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $\underline{Ax} = \underline{b} \Leftrightarrow L(\underline{x}) = \underline{b}$.

(i) $\underline{Ax} = \underline{b}$ lösbar $\Leftrightarrow \underline{b} \in \text{Bild}(L) \overset{(5.3)}{\Leftrightarrow} \underline{b}$ ist eine Linearkombination der Spaltenvektoren von $\underline{A} \Leftrightarrow$ Rang$(\underline{A}|\underline{b})$ = Rang$(\underline{A})$

(ii) Sei $\underline{x}$ irgendeine Lösung von $\underline{Ax} = \underline{b}$. Setze $\underline{x}_h = \underline{x} - \underline{x}_S$. Dann gilt

$$\underline{Ax}_h = \underline{Ax} - \underline{Ax}_S = \underline{b} - \underline{b} = 0 \text{ und } \underline{x} = \underline{x}_S + \underline{x}_h$$

(iii) Sei q die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$. Zu zeigen: $p = q$
Mit

$$\mathrm{Kern}(L) = [\underline{x} \in \mathbb{R}^n : L(\underline{x}) = \underline{0}] = [\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{A}\underline{x} = \underline{0}]$$

gilt:

$$q = \dim \mathrm{Kern}(L) \overset{\text{(Dimensionsformel)}}{=} \text{5.1/Theorem} = \dim \mathbb{R}^n - \mathrm{Rang}(L) = n - \mathrm{Rang}(L) = p$$

■

Betrachte $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, wobei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ gesucht. Aus dem Theorem 1 folgt:

	$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$	$\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$
$\mathrm{Rang}(\underline{A}\vert\underline{b}) \neq \mathrm{Rang}(\underline{A})$	nicht lösbar, falls $\underline{b} \neq \underline{0}$	
$\mathrm{Rang}(\underline{A}\vert\underline{b}) = \mathrm{Rang}(\underline{A}) = n$	eindeudig lösbar	eindeutige Lösung für $\underline{x} = \underline{0}$
$\mathrm{Rang}(\underline{A}\vert\underline{b}) = \mathrm{Rang}(\underline{A}) < n$	lösbar, aber nicht eindeutig	neben $\underline{x} = \underline{0}$ auch Lösungen $\underline{x} \neq 0$ vorhanden

Bemerkung

Sei $\mathrm{Rang}(\underline{A}|\underline{b}) = \mathrm{Rang}(\underline{A}) < n$, also $p > 0$. Weiter seien (siehe Theorem 1) $\underline{x}_h^{(1)}, ..., \underline{x}_h^{(p)}$ linear unabhängige Lösungen von $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$. Weiterhin sei $\underline{x}_S$ eine spezielle Lösung von $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$. Dann gilt:

(a) Zu jeder Lösung $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ von $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$ gibt es Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$, so dass
$\underline{x}_h = \lambda \underline{x}_h^{(1)} + ... + \lambda_p \underline{x}_h^{(p)}$ (1)
Umgekehrt ist (1) für beliebige Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $\underline{A}\underline{x}_h = \underline{0}$.
(folgt aus $\underline{A}\underline{x}_h = L(\underline{x}_h) \overset{(L \text{ linear})}{=} \lambda_1 L(\underline{x}_h^{(1)}) + ... + \lambda_p L(\underline{x}_h^{(p)}) = \lambda_1 \underline{A}\underline{x}_h^{(1)} + ... + \lambda_p \underline{A}\underline{x}_h^{(p)} = \underline{0})$
Daher heißt (1) mit beliebigen Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (sogenannten freien Parametern) allgemeine Lösung von $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$.

(b) Im gleichen Sinne wie bei (a) heißt $\underline{x} = \underline{x}_S + \underline{x}_h$ mit $\underline{x}_S$ gemäß (1) (2)
und freien Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ allgemeine Lösung von $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$

Beispiel 7.1 vergleiche Beispiel 2.2

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & c \\ \hline & & \underline{A} & & \underline{b} \end{array} \overset{\text{(Gauß)}}{\Rightarrow} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+c \\ \hline & & \widetilde{\underline{A}} & & \widetilde{\underline{b}} \end{array}$$

Nach 5.3/Rangbestimmung gilt:
es ist $\mathrm{Rang}(\underline{A}) = \mathrm{Rang}(\widetilde{\underline{A}}) = 3, \mathrm{Rang}(\underline{A}|\underline{b}) = \mathrm{Rang}(\widetilde{\underline{A}}|\widetilde{\underline{b}})$
$\mathrm{Rang}(\underline{A}|\underline{b}) = 3 \Leftrightarrow 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.
Nach Theorem 1 gilt:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \mathrm{Rang}(\underline{A}) = \mathrm{Rang}(\underline{A}|\underline{b}) \Leftrightarrow c = -1$$

Nun $c = -1$:
Dann ist $p = n - \mathrm{Rang}(\underline{A}) = 1$, d.h. die Lösungsmatrix von $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$ ist ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Der freie Parameter sei $x_3 = \lambda$. Dann gilt (2).
allgemein:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{x_3} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_h}, \text{ hierbei } \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

8 Eigenwerte und Eigenvektoren

8.1 Die Begriffe

$L : V \to V$ geg. $\lambda \in \mathbb{K}$ $\underline{\text{EW}}$ von $L :\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : Lv = \lambda v$.
$E(\lambda) :=$ Kern$(L - \lambda L)$ Eigenraum von L zum EW λ
dim E(λ) geometrische Vielfachheit (GV) von λ

Beispiel 8.1

Spiegelung $s_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $S_\alpha(\underline{v}) := \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$.
Sei $\underline{v}^{(1)} := . \begin{pmatrix} cos\frac{\alpha}{2} \\ sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} := \begin{pmatrix} -sin\frac{\alpha}{2} \\ cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Dann gilt $S_\alpha(\underline{v}^{(1)}) = 1\underline{v}^{(1)}$ und $S_\alpha(\underline{v}^{(2)}) = -1\underline{v}^{(2)}$.

Beweis
$S_\alpha(\underline{v}^{(1)}) = \begin{pmatrix} cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + sin\alpha sin\frac{\alpha}{2} \\ sin\alpha cos\frac{\alpha}{2} - cos\alpha sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.
Nun $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[cos(x-y) + cos(x+y)]$
Also ist $\underline{v}^{(1)}$ EW von S_α zum EW $\lambda_1 = 1$ und $\underline{v}^{(2)}$ EV von S_α zum EW $\lambda_2 = -1$.
$GV(\lambda_1) = \dim E(\lambda_1) = 1$. Analog für λ_2.

■

Satz 8.1

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $(v_1, ..., v_n)$. Dann sind aequivalent:

1. $\lambda_k \in \mathbb{K}$ ist EW von L zum EV v_k für $k = 1, ..., n$.
2. $\underline{A}$ ist Diagonalmatrix der Form : $\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Beweis
$(1) \Leftrightarrow L(v_k) = \lambda_k v_k (k = 1, ..., n) \Leftrightarrow underline A\underline{e_k} = \lambda_k \underline{e_k}$
$(k = 1, ..., n) \Leftrightarrow (b)$.

■

Zu (*): Koordinatenvektor von v_k bezüglich $(v_1, ..., v_n)$ ist $\underline{\alpha} := \underline{e_k}$,
Koordinatenvektor von $\lambda_k v_k$ bezüglich (...) ist $\underline{\beta} := \lambda_k \underline{e_k}$.

Hiermit folgt $L(v_k) = \lambda_K v_k \Leftrightarrow \underline{A}\underline{\alpha} = \underline{\beta} \Leftrightarrow \underline{A}e_k = \lambda_k \underline{e_k}$.
Satz 1 bedeutet: Abbildungsmatrix von L ist besonders einfach, wenn sie bezüglich einer Basis von V gebildet werden kann, die nur aus EV von L besteht.

Definition 8.2

(a) Die Matrix $\underline{\widetilde{A}} \in \mathbb{K}^{nxn}$ heisst <u>aehnlich</u> zur Matrix $\underline{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$, wenn es eine invertierbare Matrix $\underline{B} \in \mathbb{K}^{nxn}$ gibt mit $\underline{\widetilde{A}} = \underline{B^{-1}AB}$.
(b) $\underline{A}$ heisst <u>diagonalisierbar</u>, wenn eine Diagonalmatrix aehnlich zu $\underline{\widetilde{A}}$ ist.

Bemerkung

Ist $\underline{\widetilde{A}}$ aehnlich zu $\underline{A}$, so ist auch $\underline{A}$ aehnlich zu $\underline{\widetilde{A}}$, die Relation "aehnlich zu" ist also symmetrisch.

Beweis
Gilt $\underline{\widetilde{A}} = \underline{B^{-1}AB}$, so folgt
$\underline{B\widetilde{A}} = \underline{AB}$ und daraus $\underline{B\widetilde{A}B^{-1}} = \underline{A}$, das heisst
$\underline{A} = \underline{C^{-1}\widetilde{A}C}$ mit der invertierbaren Matrix $\underline{C} := \underline{B^{-1}}$.

■

Bemerkung

$\underline{A}$ ist diagonalisierbar bedeutet nach 5.5:
$\underline{A}$ kann durch einen <u>Basiswechsel</u> in eine Diagonbalmatrix
$\underline{\widetilde{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{\lambda_n} \end{pmatrix}$ überführt werden. Hierbei sind die Spalten der Matrix $\underline{B}$ die neuen Basisvektoren.

Beispiel 8.2

Nach Beispiel 1 gilt für $\S_\alpha$ mit der Abbildungsmatrix
$\underline{A}_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} : \vec{b}_1 = v^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = 1$
analog $\vec{b}_2 = V^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ EV zum EW $\lambda_2 = -1$.
Bezüglich der BAsis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ ist $\underline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Abbhildungsmatrix von S_k.
Mit $\underline{B} := (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ gilt $\underline{\tilde{A}} = \underline{B}1{-}1\underline{AB}$

Satz 8.3

Ähnliche Matritzen haben dieselben Eigenwerte.

Beispiel 8.3

Gegeben seinen $\underline{A}$ und $\underline{\tilde{A}} = \underline{B^{-1}AB}$.
(a) Sei λ EW von $\underline{A}$ zum EV $\vec{x}$, also $\underline{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ und $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Setzen $\vec{Y} = \underline{B}^{-1}\vec{x}$.
Dann gilt $\underline{\tilde{A}}\vec{y} = (\underline{B}^{-1}\underline{AAB})(\underline{B}^{-1}\vec{x}) = \underline{B}^{-1}\underline{A}(\underline{BB}^{-1})\vec{x} = \underline{B}^{-1}(\underline{A}\vec{x}) = \underline{B}^{-1}(\lambda\vec{x} =) = \lambda(\underline{B}^{-1}\vec{x})$.
Mit $\vec{x} \neq 0$ auch $\vec{y} \neq 0$. Also ist λ auch EW von $\underline{\tilde{A}}$
(b) Nach Bemerkung 3 gilt auch umgekehrt: Jeder EW von $\underline{\tilde{A}}$ ist EW von $\underline{A}$

Beachte: EV von $\underline{A}$ und $\underline{\tilde{A}}$ zum selben EW sind in Allgemeinen voneinander verschieden.

Satz 8.4

Sind $\underline{A}$ und $\widetilde{\underline{A}}$ ähnliche Matrizen, so ist für jeden ihrer (übereinstimmenden) EW die geometrische Vielfachheit bezüglich $\underline{A}$ und bezüglich $\widetilde{\underline{A}}$ gleich.

Beweis

Sei λ EW von $\underline{A}$ (also auch von $\widetilde{\underline{A}}$) und die $GV_{\underline{A}} = r$.
Dann gibt es genau r linear unabhaengige EW $x_1, ..., x_r$ von $\underline{A}$ zum EW λ. Gelte $\widetilde{\underline{A}} = \underline{B^{-1}AB}$.
Wir setzen $\underline{y_k} := \underline{B^{-1}}\underline{x_k}$ für $k = 1, ..., r$. Dann ist $\underline{y_k}$ EV von $\widetilde{\underline{A}}$ zum EW λ:
Zu zeigen:
1. $\underline{y_1}, ..., \underline{y_r}$ sind linear unabhaengig.
2. Es gibt keinen weiteren linear unabhaengigen EV von $\widetilde{\underline{A}}$ zum EW λ.
zu 1.: Gelte $\alpha_1\underline{y_1} + ... + \alpha_r\underline{y_r} = \underline{0}$ mit $\alpha_k \in \mathbb{K}$.
Es folgt (Multiplikation von links mit $\underline{B^{-1}}$): $0 = \alpha_1\underline{B^{-1}}\underline{x_1} + ... + \alpha_r\underline{B^{-1}}\underline{x_r} = \underline{B^{-1}}(\alpha_r\underline{x_r})$.
Nach Multiplikation mit $\underline{B}$ ergibt sich: $0 = \alpha_1\underline{x_1} + ... + \alpha_r\underline{x_r}$. Da $\underline{x_k}$ linear unabhaengig, folgt $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.
Also $\underline{y_1}, ..., \underline{y_r}$ linear unabhaengig.
zu 2. Nach Bemerkung 3 ist auch $\underline{A}$ aehnlich zu $\widetilde{\underline{A}}$.
Ist also $\underline{y_1}, ..., \underline{y_s}$ ein System linear unabhaengiger EV von $\widetilde{\underline{A}}$ zum EW λ,
so ist $\underline{\widetilde{x_k}} := \underline{B}\underline{y_k}$ für $k = 1, ..., s$ ein System unabhaengiger EV von $\underline{A}$ zum EW λ und daher $s \leq r$.
Also ist r die Maximalzahl linear unabhaengiger EV von $\widetilde{\underline{A}}$ zum EW λ.

■

Satz 8.5

Sei $L : V \to V$ ein Endomorphismus. Sind $v_1, ..., v_r$ EV von L zu EW $\lambda_1, ..., \lambda_r$ und gilt $\lambda_i \neq \lambda_k$ für $i \neq k$, so sind $v_1, ..., v_r$ linear unabhaengig.

Beweis

Hier für $r = 2$. ($r > 2$ folgt durch vollständige Induktion)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = o \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow o = L(o) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 \qquad (2)$$

(1) mit λ_2 multiplizieren:

$$o = \alpha_1 \lambda_2 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 \qquad (3)$$

$$(2) - (3) : \qquad o = \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{v_1}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Mit (1) ist $\alpha_2 = 0$, also sind v_1 und v_2 linear unabhängig.

■

Beispiel 8.4

gegeben: zwei starre gekoppelte Pendel. Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ (t : Zeit) aus der Ruhelage werden beschriben durch Differentialgelichungssystem $\ddots \vec{x}''(t) = \underline{v}ecx(t)$, wobei $\underline{A} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \beta \\ \beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix}$ mit positiven Konstantenten $\alpha, \beta, \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$
$\underline{\ddot{x}}(t) = \underline{Ax}(t)$ ausführlich:
$\underline{\ddot{x_1}}(t) = (-\alpha - \beta)x_1(t) + \beta x_2(t)$,
$\underline{\ddot{x_2}}(t) = (-\alpha - \beta)x_2(t) + \beta x_1(t)$,
Zeigen spaeter, dass $\underline{A}$ diagonalisierbar ist. (mittels einer invertierbaren Matrix $\underline{B}$)

Betrachte die transformierte Funktion $\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} := \underline{B}^{-1}\underline{x}(t)$.
$\underline{B\ddot{y}}(t) = \underline{BB}^{-1}\underline{\ddot{x}}(t) = \underline{\ddot{x}}(t) = \underline{Ax}(t) = \underline{ABy}(t)$, also
$\underline{\ddot{y}}(t) = \underline{B}^{-1}\underline{ABy}(t)$. *1)
Hierbei hat $\underline{B}^{-1}\underline{AB}$ Diagonalgestalt, also z.B. $\underline{B}^{-1}\underline{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Aus (*) folgt nun $\ddot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t)$ und $\ddot{y}_2 = \lambda_2 y_2(t)$: DGL-System entkoppelt.

8.2 Das charakteristische Polynom

Vorbereitung (Beweis in Analysis):
Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $p(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda^1 + a_0$, (I)
wobei $a_0, ..., a_n$ komplexe Konstanten mit $a_n \neq 0$ sind, heißt Polynom n-ten Grades.
Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und gilt $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{C}$, wobei $q(\lambda) \neq 0$, dann heißt λ_0 Nullstelle von p der algebraischen Vielfachheit k, in Zeichen: $AV_p(\lambda_0) = k$.

Fundamentalsatz derr Algebra Jedes Polynom p n-ten Grades (siehe(I)) besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.
Genauer gilt: Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die voneinander verschiedene Nullstelle von p, und gilt $AV_p(\lambda_k) = m_k$ für $k = 1, ..., r$, so ist $m_1, ..., m_r = n$.
Weiter gilt $p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}...(\lambda - \lambda_r)^{m_r} \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (II)
(Zerlegung von p in Linearfaktoren)

Zusatz p braucht keine reellen Nullstellen zu haben, auch wenn alle Koeffizienten $a - 0, .., a_n$ reell sind.

Beispiel 8.1

$p(\lambda) := \lambda^2 + 1$, Nullstellen: $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$

Aber: sind alle $a_0, .., a_n$ reell und ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ eine m-fache Nullstelle von p, so ist auch die kojugiert koplexe Zahl $\overline{\lambda_0}$ eine m-fache Nullstelle von p. Gemäß (II) enthält p den Faktor $(\lambda - \lambda_0)^m(\lambda - \overline{\lambda_0})^m = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)^m$, wobei α, β reell und $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta < 0$.

Im Reellen ist p also im allgemeinen nur in ein Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren zerlegbar.

Beispiel 8.2

$p(\lambda) = 2\lambda^3 - 14\lambda^2 + 34\lambda - 30$: Polynom 3. Grades, alle Koeffizienten reell,
Nullstellen: $\lambda_1 = 3$ (durch probieren). Gemäß (II) gilt $p(\lambda) = (\lambda - 3)q(\lambda)$,
also Division $p(\lambda) : (\lambda - 3)$ ausführen.
Dies ergibt: $q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$.
$q(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm i$.

Zerlegung von p im Komplexen: $p(\lambda) = 2(\lambda - 3)\,[\lambda - (\lambda + i)]\,[\lambda - (\lambda - i)]$,
Zerlegung von p im Reellen: $p(\lambda) = 2(\lambda - 3)[\lambda^2 - 4\lambda + 5]$,

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, L ein Endomorphismusvon V und $\underline{A}$ die Abbildungsmatriox von L irgendeiner Basis von V.
Dann gilt:
$\lambda \in \mathbb{K}$ ist EW von L$\Leftrightarrow$ $(L - \lambda I), v = 0$ hat Loesungen $v \neq 0 \Leftrightarrow L - \lambda I$ ist kein Isomorphismus.
$\overset{5.4\ \text{Satz2}}{\Leftrightarrow}$ $\underline{A} - \lambda\underline{E}$ ist nicht invertierbar $\overset{6.3\ \text{Satz1}}{\Leftrightarrow}$ $\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$. (*)

Nach 6.4 ist:

$$\det(L - \lambda I) = \det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - \lambda & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Satz 8.1

Die durch $p(\lambda) := \det(L - \lambda I)$ definierte Funktion $p_L : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist der Form:
$p_L(\lambda) = (-1)^n a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$ mit konstantem $a \in \mathbb{K}$ und heißt charakteristischen Polynoms des Endomorphismus L.

Satz 8.2

Die EW des Endomorphismus $L : V \to V$ sind genau die Nullstellen des charkteristischen Polynoms p_L.

Nach Fundamentalsatz der Algebre gilt:
Satz 8.3

Ist L ein Endomorphismus des komplexen n-dimensionalen Vektorraumes V (also hier: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), so hat L mindestens einen EW.

Beispiel 8.3

Drehung $D_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (wobei $\varphi \neq 2k\pi, k$ ganzzahlig) ist ein Endomorphismus des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^2$, der keinen EW hat.

Beispiel 8.4

gesucht: EW und die EV der Spiegelung $S_\alpha(\underline{v}) = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}$,
(vergleiche 8.1 Bsp 2).
Lösung: $p_{s_\alpha}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} cos\alpha - \lambda & sin\alpha \\ sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$, also gilt:
$p_{S_\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 := 1$ oder $\lambda = \lambda_2 = -1$ von S_α.
Zugehörige EV:EV sind die nichttrivialen Lösungen des homgenen LGS
$\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es kann $0leq\alpha < 2\pi$ vorausgesetz werden.
Umformung mit $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ führt azf:
$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$: EV von S_α zum EW $\lambda_1 = 1$; hierbei $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$,
$\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$: EV von S_α zum EW $\lambda_2 = -1$, hierbei $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$,
Die EV $\underline{v}^{(1)}$ und$\underline{v}^{(2)}$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.
Die Abbildungsmatrix von S_α bezüglich dieser Basis ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Gemetrische Vielfahcheit des EW λ_0 von $L: V \to V$ ist $GV_L(\lambda_0) := dimE(\lambda_0) = dimKern(L - \lambda_0 I)$.
Algebraische Vielfahchheit des EW λ_0 von L ist definitionsgemäß die algebraische Vielfachheit der Nullstellen λ_0 des chakteristischen Polynoms bp_L : $AV_L(\lambda_0)$.

Satz 8.4

für jeden EW λ_0 von $L: V \to V$ gilt $GV_L(\lambda_0) \leq AV_L(\lambda_0)-$

Beweis
Sei $k := GV_L(\lambda_0)$ und $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von $E(\lambda_0)$.
Diese kann zu einer Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V ergänzt werden (4.3 Satz 1). Sei $\underline{A}$ die Abbildungsmatrix von L
bezüglich $(v_1, ..., v_n)$
, $\underline{x_i}$ der Koordinatenmatrix von v_i bezüglich Standardbasis von $\mathbb{K}^n (i = 1, ..., n)$ und $\underline{B} := (\underline{x}_1|...|\underline{x}_n) \in \mathbb{K}^{nxn}$.
Wegen $L(v_i) = \lambda_0 v_i$ für $i = 1, .., k$ gilt $\underline{A}\underline{x_i} = \lambda_0 \underline{x}_i$ für $1 = 1, ..., k$.
Es folgt $\underline{AB} = (\underline{a}\underline{x_1}|...|\underline{A}\underline{x_k}| * **) = (\lambda_0 \underline{x_1}|...|\lambda_0 \underline{x_k}| * **)$.
Wegen $Rang(\underline{B}) = n$ existiert $\underline{B}^{-1}$.
Nun gilt $\underline{B}^{-1}\underline{AB} = (\lambda_0 \underline{B}^{-1}\underline{x_1}|...|\lambda_0 \underline{B}^{-1}\underline{x_k}| * **) = (\lambda_0 \underline{e_k}|...|\lambda_0 \underline{e_k}| * **) =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \underline{0} & \underline{0} & \\ \underline{0} & \ddots & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{0} & \lambda_0 & *** \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Andere Argumentation zu obigem Matrix-Schema: Sei: $k := GV_L(\lambda_0)$, Basis $(v_1, ..., v_k)$ von $E(\lambda_0)$ wird ergänzt zu Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V.
Sei $v \in V$, also $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + ... + \alpha_n v_n$ (1);
hierbei $\alpha_i \in \mathbb{K}$ für $i = 1, ..., n$. Es folgt
$L(v) = al_1 L(v_1) + ... + \alpha_k L(v_k) + \alpha_{k+1} L(v_{k+1}) + ... + \alpha_n L(v_n) = \lambda_0 \alpha_1 v_1 + ... + \lambda_0 \alpha_k v_k) + (...)$ (2a).
Fr $j = k + 1, ..., n$ ist $\underline{\alpha_j L(v_j)} = \alpha_j(\varrho_{1j} + ... + \varrho_{nj} v_n)$. (2b)
Also die Abbildungsmatrix von L bezüglich $(v_1, ..., v_n)$:

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_0 & \underline{0} & | & \rho_{1k+1} & \ddots & \varrho_{1n} \\ \underline{0} & \lambda_0 | \varrho kk+1 & \ddots & \varrho_{kn} & & \\ \hline & & & & & \\ \underline{0} & | & \underline{S} & & & \end{pmatrix}$$

Mit Koordinatenvektor $\underline{\alpha} := (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$ von v bezüglich $(v_1, ..., v_n)$ (siehe (1)) ist $\underline{T\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_0\alpha_1 + \varrho_{1,k+1}\alpha k + 1 + .. \\ \vdots \end{pmatrix}$

dies ist der Koordinatenvektor von $L(v)$ bezüglich $(v_1, ..., v_n)$ (siehe (2a), (2b)).
Fr charakteristisches Polynom folgt:
$p_L(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \det(I - \lambda \underline{E}_n) \overset{\text{Entwicklung nach 1. Spalte}}{=} (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot \det(\underline{S} - \lambda \underline{E}_{n-k})$
Also gilt $AV_L(\lambda_0) \geq k = GV_L(\lambda_0)$.

■

Beispiel 8.5

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.
$P_A(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ 0 & \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)^2$. Somit $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$. $\lambda = \alpha$ ist also EW von $\underline{A}$ und von $L_{\underline{A}}$ mit $AV_{L_A}(\alpha) = 2$.
$\underline{x} \in E(\alpha) = Kern(L_A - \alpha I) \Leftrightarrow (L_A - \alpha I)\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow (\underline{A} - \alpha\underline{E})\underline{x} = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 =: c$ beliebig, $x_2 = 0$.
Somit $E(\alpha) = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R}, \dim E(\alpha) = 1$.
Somit $GV_{L_A}(\alpha) = 1 < 2 = AV_{L_A}(\alpha)$.
<u>Behauptung:</u> $\underline{A}$ nicht diagonalisierbar.
Beweis
Wäre $\underline{A}$ diagonalisierbar, dann gäbe es Basis $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ von $\mathbb{R}^2$, so dass $\underline{Ab_1} = \alpha\underline{b}_1$ und $\underline{Ab_2} = \alpha\underline{b}_2$. Sei $\underline{b_1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta 21 \end{pmatrix}$ und $\underline{b_2} = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \end{pmatrix}$. Dann gilt $\underline{Ab_1} = \alpha\underline{b}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha\beta_{11} + \beta_{21} = \alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{21} = \alpha\beta_{21} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta_{21} = 0$ und β_{11} beliebig.
Analog $\underline{Ab_2} = \alpha\underline{b}_2 \Leftrightarrow \beta_{22} = 0$ und β_{12} beliebig.
Somit ist $\underline{b_1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\underline{b_2} = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig: Widerspruch!

■

Beweis

Wäre $\underline{A}$ diagonal, so wäre $\underline{A}$ der Diagonalmatrix $\underline{\widetilde{A}} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Ähnlich (8.1 Satz 2). Es gilt $\underline{\widetilde{A}x} = \alpha\underline{x}$ für <u>jedes</u> $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, also ist $GV_{\underline{\widetilde{A}}} = 2 \neq 1 = GV_A(\alpha)$: Widerspruch zu 8.1 Satz 3.

■

8.3 Das Diagonalisierungstheorem

Vorbereitung auf das Studium von $E(\lambda)$:
Sei V ein $\mathbb{K}$ - Vektorraum, seien U, U_2 UVR von V.

$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$: Summe von U_1 und U_2.
Ist $u \in U_1 + U_2$, dann also $u = u_1 + u_2$ mit $u_i \in U_i$, fr $i = 1, 2$. Dann im Allemeinen nicht endeutig:
Sei $w \in U_1 \cap U_2, W \neq 0$ (*).
Setzen $u'_1 := u_1 + w$ und $u'_2 := u_2 - w$. Dann $u'_i \in U_i, u'_i \neq u_i$ fr $i = 1, 2$ und $u'_1 + u'_2 = u_1 + u_2 = u$.

Definition 8.1

Seien $U_1, ..., U_r$ UVR von V. Man sagt V ist die <u>direkte Summe</u> von $U_1, ..., U_r$, in Zeichen:
$V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$ oder $V = \oplus_{i=1}^{r} U_i$, wenn sich jedes $v \in V$ <u>eondeutig</u> in der
Form $v = u_1 + ... + u_r$ und $u_i \in U_i$ fr $i = 1, ..., r$ (1) darstellen l?st.

Genau dann ist $V = \oplus_{i=1}^{r} U_i$, wenn $V = \sum_{i=1}^{r} U_i$ und $U_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} U_k = \{0\}$ fr $i = 1, ..., r$ (2)

Beweis
Fr r=2
(I) Gelte (2) fr r=2, aslo $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = 0$.
Sei $v \in V$. Dann $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ Angenommen die Darstlling nicht eindeutig.
Dann gilt auch $v = u'_1 + u'_2$ und $u'_i \in U_i$ und $u'_i \neq u_i$ fr 1=1,2. Es folgt
$0 \neq u_1 - u'_1 = u_2 - u'_2 \in U_i \cap U_2$: Widerspruch.
(II) Umkehrung: Sei $V = U_1 \oplus U_2$. Dann $V = U_1 + U_2$. W?e ein $w \in U_1 \cap U_2$ mit $w \neq 0$ vorhanden, dann w?e
die Darstellung $v = u_1 + u_2$ nicht eindeutig: siehe (*).

■

Satz 8.2

Ist V endlich dimensional und gilt $V = U_1 \oplus U_2$, dann ist $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Beweis
Sei $(u_1, ...u_r)$ Basis von U_1 und $(v_1..., v_s)$ Basis von U_2.
Behauptung: $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s)$ ist Basis von V. $(*)$
Ist $(*)$ bewiesen, dann ist $\dim V = r + s = \dim U_1 + \dim U_2$.
Zur behauptung $(*)$
Klar ist $Lin(u_1, ..., v_s) \subset V$. Nun sei $v \in V$. Dann ist $v = u_1 + u_2$ mit $u_i \in U_i$ fr $i = 1, 2$, also $v = (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r U_r) + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s) \in Lin(u_1, .., v_s)$.
Somit ist $Lin(u_1, ..., v_s) = V$.
Noch zu zeigen: $u_1, .., v_s$ sind linear unabhängig.
Gelte $\underbrace{(x_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r)}_{:= w_1} + \underbrace{(\beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s)}_{:= wF_2} = 0$

Dann $w_1 \in U_1$ und $w_1 = -w_2 \in U_2$
Wegen $U_1 \cap U_2 = 0$ (siehe Hilfsatz) folgt $w_1 = 0$ und somit $w_2 = 0$. Da $u_1, .., u_r$ linear unabhängig und $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r = 0$, folgt
$\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$. Analog $\beta_1 = ... = \beta_s = 0$. Somit $u_1, ..., v_s$ linear unabhängig

■

Theorem 8.3 Diagonalisierung

Sei V ein n- dimensionaler $\mathbb{K}$ - Vektorraum und $L : V \to V$ eine Endomorphismus. Dann sind äquivalent:

(a) L ist diagonalisierbar.

(b) Das charakteristische Polynom p_L ist ein Produkt von Linearfaktoren, und für jeden EW λ von L ist $GV_L(\lambda = AV_L(\lambda)$.

Gilt (b) [und somit (a)] und sind $\lambda_1, ..., \lambda_r$ die paarweise verschiedenen EW von L (also die Nullstellen von p_L), so gilt $V = E(\lambda_1) \oplus ... \oplus E(\lambda_r)$.

Beweis
(I) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_r$ die voneinander verschiedene EW von L.
$(n_1, ..., n_r)$ ihre geometrischen Vielfachheitn und $(m_1, ..., m_r)$ ihre algebraischen Vielfachheiten. Fr $i = 1, ..., r$ sei $(v_1^{(i)}, ..., v_n^{(i)})$ eine Basis von $E(\lambda_i)$. Diese Vektoren sind linear unabhängig (da Basis). Fr $i \neq k$ ist nach 8.1 Satz 4
auch $v_1^{(i)}$ und $v_1^{(k)}$ linear unabhängig., ebenso $v_1^{(i)}$ und $v_2^{(k)}$ und so weiter.
Also sind $v_1^{(i)}, ..., v_{n_1}^{(i)}, ..., v_1^{(r)}, ..., v_n^{(r)}$ (1) linmear unabhängig.
Es gilt $p := n_1 + ... + n_r (\underset{8.2 \text{ Satz } 4}{\leq}) m_1 + ... + m_r \leq grad(p_L) = n$ (2)
(II) L ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Vektoren (1) eine Basis von V bilden (8.1 Satz 1), also genau dann, wenn $p = n$.
Dies ist nach (2) Äquivalent mit $n_i = m_i$ fr $i = 1, ..., r$.
(III) Nun gelte (b). Behauptung: Summe $E(\lambda_1) + ... + E(\lambda_r)$ ist direkt.
Bewies fr r=2: Sei $v \in E(\lambda_i) \cap E(\lambda_k)$ wobei $i \neq k$. Nach Lemma 1 ist $v = 0$ zu zeigen.
Es gilt $v = \alpha_1 v_1^{(i)} + ... + \alpha_{n_i} v_{n_i}^{(i)} = \beta_1 v_1^{(k)} + ... + \beta n_k v_{n_k}^{(k)}$. Da alle $v_j^{(i)}, v_j^{(k)}$
linear unabhängig, folgt $\alpha_1 = ... = \beta_{n_k} = 0$. Somit $v = 0$.
(IV) (IV) Sei $U := E(\lambda_1) \oplus ... \oplus E(\lambda_r)$.
Behuptung: $U = V$.
Nach Satz 1 (mit U statt V) gilt:
$\dim U = \dim E(\lambda_1 + \dim[E(\lambda_2 \oplus ... \oplus E(\lambda_r)] = ... = \sum \dim E(\lambda_i)$
Nach Satz 2 ist $\sum \dim E(\lambda_i) = n = \dim V$
$\dim U = \dim V \wedge U \subset V \Rightarrow U = V$.

■

Verfahren zur Diagonalisierung von $L : V \to V$

Sei $\underline{A}$ die Abbildungsmatrix von L bezüglich irgendeiner Basis von V.

1. Berechne alle EW von $\underline{A}$, also alle Lösungen $\lambda \in \mathbb{K}$ von $p_L(\lambda) := \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$
   Ist p_L nicht vollständig in Linearfaktoren in $\mathbb{K}$ zerlegbar, dann ist L nicht diagonalisierbar.

Ist p_L aber vollständig in Linearfaktoren in $\mathbb{K}$ zerlagbar, dann Schritt 2:

2. Ermittle für jede Nullstelle λ von p_L, also jeden EW λ von $\underline{A}$, eine Basis des Eigenraumes $E(\lambda)$, also linear unabhängige Lösungen $\underline{x}$ des homogenen LGS $(\underline{A} - \lambda\underline{E})\underline{x} = \underline{o}$ (3)
Prüfe, ob $GV_L(\lambda) = AV_L(\lambda)$ (*)
Nach Theorem 1 ist L genau dann diagonalisierbar, wenn (*) für jeden EW λ von L gilt.

Beispiel 8.1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich der Sandartbasis des $\mathbb{R}^3$.

1. $p_L(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow [\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ und } \lambda_3 = -1]$
Also $p_L(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$: vollständige Zerlegun in Linearfaktoren.

2. LGS (3) für $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & -1 & 1 \\ -3 & -2-1 & 3 \\ -2 & -2 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 + x_5 = 0$$

.
Mit $x_1 =: \alpha_1$ beliebig und $x_2 =: \alpha_2$ beliebig folgt $x_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die EV $(1,0,1)^T$ und $(0,1,1)^T$ bilden Basis von $E(1)$, d.h., es gilt $GV_L(1) = 2 = AV_L(1)$. LGS (3) für $\lambda = -1$ analog: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Basis von $E(-1)$.
Also $GV_L(-1) = 1 = AV_L(-1)$.
Somit L diagonalisierbar. Basis von $\mathbb{R}^3$ aus EV von L:
$\underline{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Mit $\underline{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $\tilde{A} = \underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Weiter $\mathbb{R}^3 = E(1) \oplus E(-1)$.

Satz 8.4 Folgerung aus Theorem 1

Sei L Endomorphismus von V, wobei $\dim V = n$. Hat p_L genau n voneinander verschiedene Nullstellen .$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so ist L diagonalisierbar. Die λ_k sind die EW von L, die zugehörigen EV v_k bilden eine Basis von V und
$\widetilde{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist die Abbildungsmatrix von L bezüglich $(v_1, \ldots, v_n)$.

9 Skalarprodukträume

9.1 Grundbegriffe

Ziel: Struktur von Vektorräumen anreichern, insbesonds Orthogonalitätsbegriff einführen.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z}$ die konjugierrte komplexe Zahl.

Definition 9.1

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $(u, v) \mapsto (u|v)$ von $V \times V$ nach $\mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt (SP) (oder inneres Produkt) von V. wenn gilt:

- (S1) $(u|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (u|v_1) + \alpha_2 (u|v_2)$ $\forall u, v_1, v_2 \in V$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ (linear im zweiten Argument).
- (S2) $(u, v) = \overline{(v|u)}$ $\forall u, v \in V$ (konjugierrt symmetrisch).
- (S3) $(u|u) \geq 0$, $\quad (u|u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ $\forall u \in V$ (positiv definit). Das Paar $(V, (\cdot|\cdot)$ heißt Skalarproduktraum (SP-Raum).
  Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt $(V, (\cdot|\cdot)$ auch euklidischer Raum; ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt $(V, (\cdot|\cdot)$ auch unitärer Raum.

Bemerkung

- (a) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann (S2) $\Leftrightarrow (u|v) = (v|u) \forall u, v \in V$.
- (b) Aus (S1) und (S2) folgt
  $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2|v) \underset{(S1)}{=} \overline{(v|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)} \underset{(S2)}{=} \overline{\alpha}_1 \overline{(v|u_1)} + \overline{\alpha}_2 \overline{(v|u_2)} \underset{(S2)}{=} \overline{\alpha}_1 (u_1|v) + \overline{\alpha}_2 (u_2|v)$ (konjugiert linear im ersten Argument).
- (c) Gilt $(u|v) = 0 \underline{\forall v \in V}$, so folgt $u = 0$.
  Beweis
  Mit $v := u$ gilt $(u|u) = 0$, also $u = 0$ nach (S3).
  ∎

Beispiel 9.1

- (a) Für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist $(\underline{x}|\underline{y}) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \underline{x}^T \underline{y}$ ein SP, das sogenannte Standard-SP oder natürliches SP.
- (b) Für $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ und $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ist $(\underline{x}|\underline{y}) := \overline{x}_1 y_1 + \ldots + \overline{x}_n y_n$ das Standard-SP.
  Beachte: $\overline{(\underline{y}|\underline{x})} = \overline{\overline{y}_1 x_1 + \ldots + \overline{y}_n x_n} = y_1 \overline{x}_1 + \ldots + y_n \overline{x}_n = (\underline{x}|\underline{y})$

Beispiel 9.2

Sei l^2 die Menge aller komplexen Zahlenfolgen $\underline{x} = (x_k)$, für welche die unendliche Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ konvergent ist. Dann ist l^2 ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $(\underline{x}|\underline{y}) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{x}_k y_k$ ein SP (Beweis siehe Analysis). Also ist $(l^2, (\cdot|\cdot))$ ein unitärer Raum, sogenannter Hilbertscher Folgenraum.

Statt $(x|y)$ auch $\langle x, y \rangle$

Sei $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, dann ist $\|\underline{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3^2}$ die Länge des Vektors $\underline{x}$. Mit Standard-SP von $\mathbb{R}^3$ gilt: $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{(\underline{x}|\underline{x})}$. Analog in $\mathbb{R}^n$.

Verallgemeinerung:

Definition 9.2

Ist $(V, (\cdot|\cdot))$ ein SP-Raum, so heißt die durch $\|v\| := \sqrt{(v|v)} \forall v \in V$
auf V definierte Funktion $\|\cdot\|$ Norm von V.

Satz 9.3

Ist $(V, (\cdot|\cdot)$ ein SP-Raum, so gilt für die Norm:

- (N1) $\|u\| \geq 0, \qquad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \ \forall n \in V$
- (N2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| \ \forall n \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- (N3) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung) $\forall u, v \in V$
- (CS) $|(u|v)| \geq \|u\| \, \|v\| \ \forall u, v \in V$ (Cauchy-Schwartz-Ungleichung).
  Hierbei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Beweis

- (N1), (N2) : trivial.
- (CS):
  - Fall 1: Ist $v = 0$, dann $(u|v) = 0$ und $\|u\| \cdot \|v\| = 0$, also gilt (CS) also Gleichheit. Hierbei sind u und v linear abhängig.
  - Fall 2: $v \neq 0$ und $\|v\| = 1$. Für beliebige $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:
    $\varphi(\alpha) := \|u - \alpha v\|^2 = (u - \alpha v | u - \alpha v) = (u|u) - \overline{\alpha}(v|u) - \alpha(u|v) + 2\alpha = \|u\|^2 - (u|v) \cdot (v|u) + [\overline{\alpha} - (u|v)] \cdot [\alpha - (v|u)] = \|u\|^2 - |(u|v)|^2 + |\alpha - (v|u)|^2$. (1)
    (Beachte: $(u|v) \cdot (v|u) = (u|v) \cdot \overline{(u|v)} = |(u|v)|^2$.)
    Aus (1) folgt: $\varphi(\alpha)$ ist minimal für $\alpha = (v|u) =: \alpha_0$. Also gilt: $0 \leq \|u - \alpha_0 v\|^2 = \varphi(\alpha_0) \overset{=}{(1)} \|u\|^2 - |(u|v)|^2$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $u = \alpha_0 v$, also wenn u und v linear abhängig sind.

■

9.2 Orthonormalsysteme

Definition 9.1

Sei $(V, (\cdot|\cdot))$ ein SP-Raum

- (a) Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen orthogonal, in Zeichen: $u \perp v$, wenn $(u|v) = 0$.
- (b) Ist A Teilmenge von V, so heißt $A^\perp := \{u \in V | (u|v) = 0 \; \forall v \in A\}$ orthogonales Komplement oder Orthogonalraum von A.
- (c) Eine endliche oder abzählbar unendliche Menge $v_1, v_2, \ldots \in V$ heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn gilt $(v_i|v_k) = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$
  δ_{ik}: Kroneker-Symbol
  Ist ein ONS zugleich Basis in V, so heißt es orthonormale Basis (ONB).

Bemerkung

- (a) Der Nullvektor o ist zu jedem Vektor v orthogonal. Für $u \neq o$ und $v \neq o$ gilt nach 9.1 (4*): $u \perp v \Leftrightarrow \cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$.
- (b) Ist S ein ONS in V, so gilt $\|v\| = \sqrt{(v|v)} = 1 \; \forall v \in S$

Beispiel 9.1

In $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ ist $\{\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n\}$ ein ONS, dies ist auch eine Basis, also eine ONB (Orthnormalbasis).

Satz 9.2 Parseval-Gleichung

- Ist S ein ONS in V, so sindje endlich viele Vektoren aus S linear unabhängig.
- Ist $\dim V = n$ und $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein ONS in V, so ist S eine ONB von V.
  In diesem Falle gilt für alle $u, v \in V$:
  $u = (v_1|u)v_1 + (v_2|u)v_2 + ...(v_n|u)v_n$ (1)
  Basisdarstellung von u,
  $(u|v) = \overline{(v_1|u)}(v_1|v) + \ldots + \overline{(v_u|u)}(v_n|v)$ (2),
  $\|u\|^2 = |(v_1|u)|^2 + \ldots + |(v_n|u)|^2$ (3) (Parseval-Gleichung)

Beweis

- (a) Gelte $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = 0$ mit $\alpha_k \in \mathbb{K}$ und $v_k \in S$ für $k = 1, ..., r$
  Es folgt: $0 = (v_k|0) = (v_k|\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r) = \alpha_1 (v_k|v_1) + ... + \alpha_1 (v_k|v_r) = \alpha_k$ für $k = 1, ..., r$
  Also sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig.
- (b) Nach (a) sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Wegen $\dim V = n$ ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ also Basis.
- zu (1): Zu $u \in V$ gilt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Es folgt $(v_k|u) = \alpha_1 \underbrace{(v_k|v_1)}_{=0} + ... + \alpha_k \underbrace{(v_k|v_k)}_{=1} + ... + \alpha_n \underbrace{(v_k|v_n)}_{=0}$, also (1).
- zu (2): Nach (1) ist $u = \sum_{i=1}^{n} (v_i|u) v_i$ und $v = \sum_{k=1}^{n} (v_k|u) v_k$. Es folgt $(u|v) = \sum_i \sum_k \left(\underbrace{(v_i|u)}_{=:\alpha_i} v_i | \underbrace{(v_k|v)}_{=:\beta_k} v_k \right) = \sum_i \sum_k \overline{\alpha}_i \beta_k (v_i|v_k) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \beta_i$.
- zu (3): Folgt aus $\|u\|^2 = (u|u)$ und (1).

■

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Mit $(v|w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(v, w)$ gilt:
Satz 9.3

Ist $(V, (\cdot|\cdot))$ ein SP-Raum, so gilt $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \operatorname{Re}(v|w) \; \forall v, w \in V$.

Beweis
für V reell:
$\|v - w\|^2 = (v - w|v - w) = (v|v) + (w|w) - 2(v|w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v|w)$

■

Folgerung: Ist $v \perp w$, so gilt $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (verallgemeinerte Pythagorasformel).

9.2.1 Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt

Gegeben: SP-Raum $(V, (\cdot|\cdot)), (w_1, \dots, w_m)$ System linear unabhängiger Vektoren in V.
Gesuncht: ONS $(v_1, \dots, v_m)$, so dass die $\operatorname{lin}(v_1, \dots, v_m) = \operatorname{lin}(w_1, \dots, w_m)$.
Lösung:

1. Da $(w_1, \dots, w_m)$ linear unabhängig ist, ist $w_1 \neq 0$. Setze $v_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|}$ (4)
   Dann $\operatorname{lin}(v_1) = \operatorname{lin}(w_1)$ und $\|v_1\| = 1$
2. $\tilde{w}_2 := w_2 - (w_2|v_2)\, v_1$ (5a)
   $v_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$ (5b)

   Dann $\operatorname{lin}(v_1, v_2) = \operatorname{lin}(w_1, w_2), \|v\|_2 = 1$ und $(v_2|v_1) = \frac{1}{\|\tilde{w}_2\| \cdot \|w_1\|} \left\{ (w_2|v_1) - (w_2|v_1) \cdot \underbrace{(v_1|v_1)}_{=\|v_1\|^2 = 1} \right\} = 0$, also $v_2 \perp v_1$

Beachte: $(w_2|v_1) = \|w_2\| \cdot \underbrace{\|v_1\|}_{=1} \cdot \cos(w_2, v_1)$: skalare Projektion von w_2 in Richtung v_1.

Allgemein:

Sind $v_1, \dots, v_{k-1}$ konstruiert, dann $\tilde{w}_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} (w_k|v_j)\, v_j \qquad (6a)$

$$v_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|} \qquad (6b)$$

Beweis der Orthogonalität wie oben.

Satz 9.4

1. Ist $(w_1, \dots, w_m)$ ein System linear unabhängiger Vektoren in SP-Raum V, so gibt es ein ONS $(v_1, \dots, v_m)$ mit $\text{lin}(v_1, \dots, v_m) = \text{lin}(w_1, \dots, w_m)$. Dieses ONS kann nach (4), (6a), (6b) konstruiert werden.
2. Is V ein endlichdimensionaler SP-Raum, so besitzt V eine ONB.

Beweis

1. siehe Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.
2. Ist $\dim V = m$, Dann besitzt V eine Basis $(w_1, \dots, w_m)$. Diese kann nach 1. orthonormalisiert werden.

■

Beispiel 9.2

In $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt seien $\underline{w}_1 = (1,1,1)^T$ und $\underline{w}_2 = (0,2,4)^T$. $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ ist ein System linear unabhängiger Vektoren. Durch Orthonormalisierung erhält man:

$$\underline{v}_1 := \frac{\underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\widetilde{w}}_2 := \underline{w}_2 - (\underline{w}_2|\underline{v}_1)\, \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}_2 := \frac{\underline{\widetilde{w}}_2}{\|\underline{\widetilde{w}}_2\|_2} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dann ist $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ ein Orthonormalsystem. Das kann zum Beispiel durch $\underline{w}_3 = (1,0,0)^T$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden. Da $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_3)$ kein Orthonormalsystem, muss orthonormalisiert werden. Man erhält nach (6a) und (6b):
$\underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T$

9.3 Vektorprodukt und Spatprodunkt

Betrachte $\underline{\mathbb{R}}^3$ mit Standard-SP.
Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist $P(a,b) := \{\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} : \alpha, \beta \in \{0,1\}\}$ des von a und b aufgespannten Parallelogramms.
Flächeninhalt von $P(a,b) : v_2\,(P(a,b)) = \|a\| \cdot h = \|a\|\,\|b\| \sin\varphi \qquad (*)$
$v_2\,(P(a,b)) = 0 \Leftrightarrow \underline{a}$ und $\underline{b}$ linear abhängig.
$v_2(\cdot)$:„zweidimensionales Volumen“

Seien $\underline{a}, \underline{b}$ linear unabhängig. Gesucht: $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$, so dass:

(P1) $\underline{c} \perp \underline{a}$ und $\underline{c} \perp \underline{b}$

(P2) $\|\underline{c}\| = v_2\,(P(a,b))$ (siehe (*))

(P3) $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ ist ein positiv orientiertes Dreibein („Dreifingerregel“)

Definition 9.1

Gegeben seien Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Dann heißt der Vektor

$$\underline{a} \times \underline{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \underline{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \underline{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt (oder **Kreuzprodukt** oder **äußeres Produkt**) von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.
Zu (*): Merkregel, Determinante nach 1. Spalte formal entwickeln.

Satz 9.2

Sind $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, so gilt:

1. $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{0}$.

2. Sind $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear unbabhängig und ist $\underline{x} \perp \underline{a}, \underline{x} \perp \underline{b}$, so ist $\underline{x} = \lambda(\underline{a} \times \underline{b})$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Für $\underline{a} \neq \underline{0}$ und $\underline{b} \neq \underline{0}$ gilt $\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \sin(\underline{a}, \underline{b}) = \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - (\underline{a}|\underline{b})^2}$

Beweis

siehe Homepage

■

Nach Satz 2 hat $\underline{c} := \underline{a} \times \underline{b}$ die Eigenschaften (P1) und (P2).

Zu (P3):

(I) Sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist $||\underline{a}||_2 = 1$, dann gibt es genau ein $\alpha \in (-\pi, \pi]$ mit $a1 = \cos\alpha$ und $a_2 = \sin\alpha$. Analog $b_1 = \cos\beta$ und $b_2 = \sin\beta$, falls $||\underline{b}||_2 = 1$.

Der orientierte Winkel ψ von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$ ist $\psi := \beta - \alpha(+2k\pi$, k ganzzahlig). $\psi > 0$ bedeutet Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn in der Ebene $Lin(\underline{a}, \underline{b})$: mathematisch positive Drehung. Analog $\psi < 0$ Drehung im Uhrzeigersinn: mathematisch negativ.

Es gilt $\sin\psi = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \sin\alpha = a_1 b_2 - a_2 b_1$. (1)

(II) Sind $\underline{a} = (a_1, a_2, 0)^T$ und $\underline{b} = (b_1, b_2, 0)^T$ beliebige von $\underline{0}$ verschiedene Vektoren, so (I) anwenden auf $\frac{\underline{a}}{||\underline{a}||_2}$ und $\frac{\underline{b}}{||\underline{b}||_2}$. Mit (1) folgt $\sin\psi = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{||\underline{a}||_2 \cdot ||\underline{b}||_2}$ (2). Hierbei ψ: orientierter Winkel von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

(III) Mit $\underline{a}, \underline{b}$ wie unter (II) gilt: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \Delta_3 \underline{e}_3$, wobei $\Delta_3 := a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Ist $\Delta_3 > 0$, dann nach (2) $\sin\psi > 0$, also $0 < \psi < \pi$: Drehung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ mathematisch positiv. Hierbei hat $\Delta_3 \underline{e}_3$ die Richtung von $\underline{e}_3$, also ist $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})$ ein positiv orientiertes Dreibein. Ist $\Delta_3 < 0$, dann hat $\Delta_3 \underline{e}_3$ die Richtung $-\underline{e}_3$. Also gilt „Dreifingerregel“ ebenfalls.

(IV) Der Fall beliebiger Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ ist auf (III) zurückzuführen.

Anwendung 1: Orthonormalisierung in $\mathbb{R}^3$
Sei $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Mit Orthonormalisierungsverfahren erhält man ein Orthonormalsystem (v_1, v_2). Ist $(v_1, v_2, v_1 \times v_2)$ eine ONB von $\mathbb{R}^3$

Beweis
$v_1 \times v_2$ ist orthonormal zu v_1 und v_2 (Satz 1). Weiter gilt:

$$||\underline{v}_1 \times \underline{v}_2||_2 = \underbrace{||\underline{v}_1||_2}_{=1} \cdot \underbrace{||\underline{v}_2||_2}_{=1} \cdot \underbrace{\sin(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}_{=\frac{\pi}{2}} = 1$$

■

Beispiel 9.1

Sei $\underline{w}_1 = (1,1,1)^T$ und $\underline{w}_2 = (0,2,4)^T$. Nach Orthonormalieserunsverfahren ist $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Siehe Beispiel 9.2 2

$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \ldots = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Satz 9.3 Eigenschaften des Vektorproduktes

Für $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

(b) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}|\underline{c})\,\underline{b} - (\underline{b}|\underline{c})\,\underline{a}$ (Graßmann-Entwicklung)

Beweis: Übungsaufgabe

Anwendung 2: Gleichförmige Kreisbewegung
Für die Kreisbewegung einer Punktmasse gilt zur Zeit t: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{w} \times \underline{x}(t)$.
w hat die Richtung der Drehachse, $\|\underline{w}\|$ ist die Winkelgeschwindigkeit.

Sind $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear unabhängig, so heißt die Menge $P(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i | \alpha_i \in [0,1] \right\}$ n-dimensionales Parall
oder n-Spat.

Beispiel 9.2 Spezialfall $n = 3$

$v_3\left(P(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)\right) = v_2\left(P(\underline{a}_1, \underline{a}_2)\right) \cdot h$,
$v_2\left(P(\underline{a}_1, \underline{a}_2)\right) = \|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\|$,
$h = \|\underline{a}_3\| \cdot |\cos\varphi|$, also $v_3\left(P(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)\right) = |(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|\underline{a}_3)|$ (6)

Definition 9.4

Mann nennt

$$[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3] := |(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|\underline{a}_3)| \quad \textbf{Spatprodukt}$$

Aus Definition von Vektor- und Spatprodukt sowie (6) folgt:

Satz 9.5

(a) Für beliebige Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3] = \det(\underline{a}_1|\underline{a}_2|\underline{a}_3)$$

Hierbei steht rechts die Deeterminante der Matrix , deren k-te Spalte der Koordinatenvektor von $\underline{a}_k$ bezüglich der Standartbasis von $\mathbb{R}^3$ ist ($k = 1, 2, 3$).

(b) Sind $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ linear unabhängig, so ist

$$v_3(P(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)) = |\det(\underline{a}_1|\underline{a}_2|\underline{a}_3)| \qquad (6^*)$$

Das Volumen der 3-Spats $P(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.

Analog in $\mathbb{R}^2$: $v_2(P(\underline{a}_1, \underline{a}_2)) = |a_1| \cdot |a_2| \sin(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \underset{\text{nachrechnen}}{=} |\det(\underline{a}_1|\underline{a}_2)|$, wobei $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in \mathbb{R}^2$.

Definition 9.6 Verallgemeinerung

Sind $\underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ für $k = 1, \ldots, n$ linear unabhängig, so heißt $v_n(P(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)) := |\det(\underline{a}_1| \ldots |\underline{a}_n)|$ n-dimensionales Volumen des n-Spats $P(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$.

9.4 Orthogonale Projektion

Sei V ein Skalarproduktraum.

Definition 9.1

Ist $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum von V, so heißt $\mathcal{U}^{\perp} := (w \in V | (u|w) = 0 \; \forall u \in \mathcal{U})$ Orthogonalraum zu $\mathcal{U}$. und $\mathcal{U}^{\perp} := \left(\mathcal{U}^{\perp}\right)^{\perp}$ Biorthogonalraum zu $\mathcal{U}$.

Bemerkung

(a) $\mathcal{U}^{\perp}$ ist ein Untervektorraum von V. (Folgt aus der Linearität des SP.)

(b) Stets gilt $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{\perp\perp}$. (Ist $u \in \mathcal{U}$, so folgt $(u|w) = 0 \, \forall u \in \mathcal{U}^{\perp}$, also $u \in u^{\perp\perp}$.)

Definition und Satz 9.2

Sei $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum von V mit $0 < \dim \mathcal{U} < +\infty$. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ genau ein $u_{\perp} \in \mathcal{U}^{\perp}$ mit $v = u + u_{\perp}$. Es gilt also $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$. Man nennt $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v) := u$ bzw. $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}}(v) := u_{\perp}$ orthogonale Projektion von v auf $\mathcal{U}$ bzw. auf $\mathcal{U}^{\perp}$. Die dadurch definierte Abbildung $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}} : V \to V$ heißt orthogonaler Projektor bezüglich $\mathcal{U}$, analog $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}}$. Ist V endlichdimensional, so gilt $\mathcal{U}^{\perp\perp} = \mathcal{U}$.

Beweis Satz 1

Sei $\dim \mathcal{U} = k$ und $(u_1, \ldots, u_k)$ ONB von $\mathcal{U}$. Weiter sei $v \in V$. Wir setzen $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v) =: u = (u_k|v)\, u_k$ (1)
$(u_1|v) = \|v\| \cdot \|u_1\| \cos \alpha$. Nach (1) ist $u \in \mathcal{U}$.
Behauptung: $u_{\perp} := v - u \in \mathcal{U}^{\perp}$.
Beweis: Für $j = 1, \ldots, k$ gilt:

$$(u_j|u_{\perp}) = (u_j|v) - (u_j|u) \overset{(1)}{=} (u_j|v) - \sum_{i=1}^{k} (u_j|v) \underbrace{(u_j|u)}_{=\delta_{ji}} = (u_j|v) - (u_j|v) = 0$$

also $u_{\perp} \in \mathcal{U}^{\perp}$ Somit gilt: $V = \mathcal{U} + \mathcal{U}^{\perp}$. Ist $v \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp}$, so folgt $(v|v) = 0$, also $v = 0$.
Nach 8.3 Lemma 1 ist $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$.
Letze Aussage: Übungsaufgabe.

■

Satz 9.3 Eigenschaften des Projektors

Sei $\mathcal{U}$ ein UVR von V mit $0 < \dim \mathcal{U} < +\infty$.Dann sind $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}$ und $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}}$ Endomorphismen von V, und es gilt

$$\operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}) = \operatorname{Kern}(\operatorname{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}} = \mathcal{U} \qquad (2), \operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_{\mathcal{U}^{\perp}}) = \operatorname{Kern}(\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^{\perp} \qquad (3).$$

Ist V endlichdimensional, so gilt außerdem $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^{\perp} = \dim V$ (4).

Beweis
Linearität, (2) und (3): nachrechnen.
Mit (2) und (3) folgt (4) aus 5.1. Theorem 1.

■

Satz 9.4 Minimaleigenschaft der Projektion

Sei $\mathcal{U}$ ein UVR von V mit $0 < \dim \mathcal{U} < +\infty$.
Dann gilt für jedes $v \in V$:

$$\|v - \operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v)\| \leq \left\|v - u'\right\| \qquad \forall u' \in \mathcal{U}, \quad (5)$$

d.h., von allen Elementen $u' \in \mathcal{U}$ hat $\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v)$ den kürzen Absatnd von v, und dieser ist $\|v - \operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v)\|$ $= \|\operatorname{proj}_{\mathcal{U}^\perp}(v)\| = \sqrt{\|v\|^2 - \|\operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v)\|^2}$. (6)

Beweis

Sei $v \in V$ gegeben, sei $u := \operatorname{proj}_{\mathcal{U}}(v)$ und $u_\perp := \operatorname{proj}_{\mathcal{U}^\perp}(v)$. Nach Satz 1 ist $v = u + u_\perp$. Für beliebige $u' \underline{\mathcal{U}}$ gilt $v - u' = (u - u') + u_\perp$.Wegen $u - u' \in \mathcal{U}$ und $u_\perp \in \mathcal{U}^\perp$ folgt $u - u' \perp u_\perp$. Hiermit gilt $\|v - u'\|^2 = \|(u - u') + u_\perp\|^2 \overset{(Pyth.)}{=} \|u - u'\|^2 + \|u_\perp\|^2 \geq \|u_\perp\|^2 = \|v - u\|^2$. Also (5) bewiesen.

■

Zu (6): $\|v\|^2 = \|u - (-u_\perp)\|^2 \overset{(Pyth.)}{=} \|u\|^2 + \|-u_\perp\|^2 = \|u\|^2 + \|v - u\|^2$.

10 Endormorphismen in SP-Räumen

10.1 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Definition 10.1

Sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Raum, also ein reeller (bzw. komplexer) Skalarproduktraum. Ein Endomorphismus $L : V \to V$ heißt <u>orthogonal</u> (bzw. <u>unitär</u>), wenn $(L(v)|L(w)) = (v|w)\ \forall v, w \in V$.

Satz 10.2

Ist $L : V \to V$ orthogonal (bzw. unitär), so gilt:

(a) Ist λ EW von L, dann gilt $|\lambda| = 1$.

(b) $L(v) \perp L(w) \Leftrightarrow v \perp w\ \forall v, w \in V$.

<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe.

Satz 10.3

$L : V \to V$ ist genau dann orthogonal (bzw. unitär), wenn $\|L(v)\| = \|V\|\ \forall v \in V$ (*)

Beweis

(I) Sei L orthogonal (bzw. unitär), dann gilt: $\|L(v)\|^2 = (L(v)|L(v)) = (v|v) = \|v\|^2$.

(II) Gelte (*). Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$(L(v)|L(v)) \overset{(9.2/Satz2)}{=} \frac{1}{4}\left(\|L(v)+L(w)\|^2 - \|L(v)-L(w)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|L(v+w)\|^2 - \|L(v-w)\|^2\right) \overset{(*)}{=} = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) \overset{(9.2/Satz2)}{=} (v|w)$$

■

Ist $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \underline{A} = (a_{jk})$, dann $\overline{\underline{A}} := (\overline{a}_{jk}), (\overline{a}_{jk} :$ zu a_{jk} konjugiert komplex)

Definition 10.4

(a) Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, wenn $\underline{A}$ invertierbar ist und $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$.

(b) Matrix $\underline{A}\mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **unitär**, wenn $\underline{A}$ invertierbar ist und $\underline{A}^{-1} = \overline{\underline{A}}^T$.

Man schreibt:

$$O(n) := \{\underline{A} \in GL(n,\mathbb{R}) | \underline{A}^{-1} = \underline{A}^T\},$$
$$U(n) := \left\{\underline{A} \in GL(n,\mathbb{C}) | \underline{A}^{-1} = \overline{\underline{A}}^T\right\}$$

Die sind bezüglich der Matritzenmultiplikation Grupen. Daher heißt $O(n)$ **orthogonale Gruppe** und $U(n)$ **untitäre Gruppe** (der Ordnung n).

Satz 10.5

Für $\underline{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) $\underline{A}$ ist orthogonal (bzw. unitär)

(b) Die Spaltenvektoren von $\underline{A}$ sind die ONB von $\mathbb{K}^n$ beziehungsweise des Standard-SP

(c) Die Zeilenvektoren von $\underline{A}$ sind die ONB von $\mathbb{K}^n$ beziehungsweise des Standard-SP

Beweis

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \end{pmatrix} \rightarrow \overline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \overline{a}_{1j} & \cdots & \overline{a}_{nj} \\ \vdots & & \\ \overline{a}_{1k} & \cdots & \overline{a}_{nk} \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$a_{1j}, \ldots, a_{nj} = \underline{a}_j, \quad a_{1k}, \ldots, a_{nk} = \underline{a}_k$

Für das Element c_{jk} der Matrix $\overline{\underline{A}}^T \underline{A}$ gilt:

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} a_{ik} = \left(\underline{a}_j | \underline{a}_k\right) \qquad (1)$$

$$(a) \Leftrightarrow \overline{\underline{A}}^T \underline{A} = \underline{E} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\underline{a}_j | \underline{a}_k\right) = \delta_{jk} \; \forall j,k \Leftrightarrow (b)$$

Analog: $(a) \Leftrightarrow (c)$

■

Beispiel 10.1

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} : \|\underline{a}_1\|_2 = 1 = \|\underline{a}_2\|_2, \quad (\underline{a}_1|\underline{a}_2) = 0$$

Also $\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ ist ONB von $\mathbb{C}^2$. Nach Satz 3 ist $\underline{A} \in \mathcal{U}(2)$.
$\det \underline{A} = i, |\underline{A}| = 1$

Bemerkung

Ist $A \in \mathcal{U}(n)$, dann gilt $|\det \underline{A}| = 1$.

Beweis

$|\det \underline{A}|^2 = \det \underline{A} \cdot \overline{\det \underline{A}} = \det \underline{A} \cdot \det \overline{\underline{A}} = \det \underline{A} \cdot \det \overline{\underline{A}}^T = \det(\underline{A} \cdot \overline{\underline{A}}^T) \overset{(A \text{ unitär})}{=} \det \underline{E} = 1$

■

Satz 10.6

Sei V ein endlichdimensionaler SP-Raum und B eine ONB von V.Weiter sei $L: \ V \to V$ ein Endomrophismus und $\underline{A}$ die Abbildungsmatrix von L bezüglich der Basis B. Dann gilt: L ist orthogonal (bzw. unitär) $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ orthogonal (bzw. unitär) ist.

Beweis siehe http://math.tu-dresden/ schiro/

Theorem 10.7

Sei V ein unitärer Raum mit $\dim V = n$ und $L : v \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

(a) V besitzt eine orthonormale Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ aus EV von $L \Rightarrow L$ ist diagonalisierbar

(b) Ist $\underline{A}$ die Abbildungsmatrix von L bezüglich B, so gilt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hierbei λ_k EW zum EV v_k und es gilt $|\lambda_k| = 1$, für $k = 1, \dots, n$

(c) Es gilt $V = E(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_r)$ und $E(\lambda_j) \perp E(\lambda_k) \ \forall j \neq k$
Hierbei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen EW von L.

Beweis

(a) Beweis durch Induktion bezüglich n:

I) Ist $n = 0$, also $V = \{0\}$, dann ist die Aussage richtig.

II) Gelte Aussage für $n-1$. Charakteristisches Polynom p_L von V sei in Linearfaktoren zerlegbar.

$$p_L(\lambda) = \pm 1 \cdot (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) \text{ mit } \lambda_k \in \mathbb{C} \text{ für } k = 1, \dots, n$$

Hierbei ist λ_k EW von L. Nach Satz 1 ist speziell $|\lambda_1| = 1$. Sei v_1 EV zum EW λ_1
Dann $v_1 \neq 0$ und (eventuell nach Division durch $\|v_1\|_2$) ist $\|v_1\| = 1$.
Sei $\mathcal{U} = \{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ und $W := \mathcal{U}^T = \{w \in V : (w|v_1) = 0\}$
Behauptung: $L(W) \subset W$
Beweis: Sei $w \in W$. Dann gilt:

$$\lambda_1 \left(L(w)|v_1\right) = (L(w)|\lambda_1 v_1) = (L(w)|L(v_1)) \overset{(L \text{ unitär})}{=} (w|v_1) = 0$$

Da $\lambda_1 \neq 0$, folgt $(L(w)|v_1) = 0$, also $L(w) \in W$.
Die Einschränkung F von L auf W ist also ein Endomorphismus und ebenfalls unitär. Nach 9.3/Satz 2 gilt

$$n = \dim V \overset{()}{=} \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^T = 1 + \dim W \text{ also } \dim W = n - 1$$

Nach Induktionsannahme gilt (a) für F in W. Also es existiert ONB $(v_2, \dots, v_n)$ von W, die aus EV von F und somit von L bestehen. Da $\|v_1\|_2 = 1$ und $v_1 \perp v_k$ für $k = 1, \dots, n$, ist nun $(v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V aus EV von L.

(b) Trivial nach Konstruktions der ONB B. Nach Satz 1 ist $|\lambda_k| = 1$.

(c) Nach 8.3 Theorem 1 gilt $V = E(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_r)$. Noch zu zeigen: $E(\lambda_j) \perp E(\lambda_k)$ für $j \neq k$. Sei $v \in E(\lambda_j)$ und $E(\lambda_k)$. Dann gilt:

$$(v|w) \overset{(L \text{ unitär})}{=} SkalL(v)L(w) = (\lambda_j v|\lambda_k w) = \overline{\lambda}_j \lambda_k \,(v|w)$$

Wäre $(v|w) \neq 0$, dann wäre $\overline{\lambda}_j \lambda_k = 1$, also

$$\lambda_j = (\lambda_j \overline{\lambda}_j)\lambda_k = |\lambda_j|^2 \lambda_k = \lambda_k \Rightarrow \text{ Widerspruch}$$

Somit $(v|w) = 0$, also $v \perp w$.

■

Bemerkung

Ist V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $L: V \to V$ orthogonal, so gilt die Aussage von Theorem 1 auch, falls p_L vollständig in **reelle Linarfaktoren** zerlegbar ist.

Speziell $n = 2$:

Satz 10.8

Ist $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein orthonormaler Endomorphismus un $\underline{A} \in O(2)$die Abbildungsmatrix von L bezüglich der Standartbasis $\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ von $\mathbb{R}^2$, so gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\text{(a)} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \textbf{oder} \quad \text{(b)} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Im Fall (a) ist $\underline{A}$ die Drehmatrix (Drehung un Winkel α); $\underline{A}$ hat genau dann reelle EW, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$, also $\underline{A} = \underline{E}$ oder $\underline{A} = -\underline{E}$.
Im Fall (b) ist $\underline{A}$ eine Spiegelmatrix; $\underline{A}$ hat für jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$ die EW $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit dem EV $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$; die Matrix $S := (\underline{v}_1|\underline{v}_2)$ ist orthogonal, und es gilt

$$\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \underline{S}^T\underline{A}\,\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10.2 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 10.1

(a) Sei V ein SP-Raum. Ein Endomorphismus $L: V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn $(L(v)|w) = (v|L(w)) \; \forall v, w \in V$

(b) Eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$.

(c) Eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, wenn $\overline{\underline{A}}^T = \underline{A}$.

Satz 10.2

Sei V ein endlichdimensionaler SP-Raum, B eine ONB von V, $L: V \to V$ ein Endomorphismus und $\underline{A}$ die Abbildungsmatrix von L bezüglich B. Dann gilt:
L ist selbstabdjungiert $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ ist symmetrisch (bzw. hermietesch)

Beweis: Analog dem Beweis von 10.1 Satz 4

Theorem 10.3

Sei V ein n-dimensionaler SP-Raum und $L : V \to V$ ein selbstadjungiert Endomorphismus. Dann gilt:

(a) V besitzt eine ONB B aus EV von L. L ist diagonalisierbar.

(b) Bezüglich der Basis B ist $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix von L, hierbei sin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW von L und die sind sämtlich reell.

(c) Es gilt: $V = E(\lambda_1 \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$ und $E(\lambda_j) \perp E(\lambda_k)\ \forall j \neq k$ Hierbei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen EW von L.

Beweis: siehe Homepage

Beispiel 10.1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Endomorphismus mit der Abbildungsmatrix

$$\underline{A} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & \text{rot}\,2 \\ 10 & \text{rot}\,2 & -11 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der Standardbasis von } \mathbb{R}^3$$

Da $\underline{A}$ symmetrisch, ist L selbstadjungiert. Diagonalisierung gemäß Verfahren in 8.3:
Charakteristisches Polynom:

$$p_L(\lambda) = p_{\underline{A}}(\lambda) = \det(\underline{-}\lambda\underline{E}) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

Also EW:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

EV: zu λ_1 : Sind die Lösungen $\underline{x} \neq 0$ des homogenen LGS $(\underline{A} - \lambda\underline{E})\underline{x} = \underline{0}$. Lösung:

$$\underline{x} = \alpha(5, 1, 2)^T \text{ mit } \alpha \neq 0$$

Somit $\underline{E}(\lambda_1)$:

$$\underline{E}(\lambda_1) = \left\{\alpha(5, 1, 2)^T : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Dimension:

$$\dim \underline{E}(\lambda) = 1$$

Analog verfahren wir mit den anderen EW:

$$\underline{E}(\lambda_2) = \left\{\beta(0, -2, 1)^T + \gamma(1, -1, -2)^T : \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}, \quad \dim \underline{E}(\lambda_2) = 2$$

Durch Orthonormierung erhält man eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ aus EV von L:

$$B := (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \text{ mit } \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5, 1, 2)^T, \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)^T, \underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T$$

Der Wechsel von $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ wird beschrieben durch die Matrix $\underline{T} := (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3)$.
Es gilt:

$$\underline{T}^{-1}\underline{AT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da B eine ONB ist, ist $\underline{T}$ eine orthogonale Matrix. Also gilt: $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^T$

10.3 Bilinearformen und quadratische Formen

Im Folgenden sei V ein euklidischer Raum.

Definition 10.1

Eine Funktion $b: V \times V \to \mathbb{R}$ heißt (reelle) **Biliniarform**, wenn gilt:

- Für festes $v \in V$ ist $u \mapsto b(u,v)$ linear auf V und
- Für festes $u \in V$ ist $v \mapsto b(u,v)$ linear auf V.

Gilt außerdem $b(u,v) = b(v,u)\ \forall u,v \in V$, so heißt b **symmetrische Bilinearform**

Gilt $b(u,u) \geq 0\ \forall u \in V$, so heißt b **positiv semidefinit**

Gilt $b(u,u) > 0\ \forall u \in V, u \neq 0$, so heißt b **positiv definit**

Bemerkung

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist ein reeles SP auf V

Satz 10.2

Sei V ein n-dimensionaler Raum.

(a) Ist $B: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, so gibt es genau dann einen selbstadjunkten Enomorphismus $L: V \to V$, sodass $b(u,v) = (u|L(v))\ \forall u,v \in V$ (1) Ist $L\ V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus, so ist durch (1) eine symmetrische Bilinearform $b: V \times V \to \mathbb{R}$ definiert.

Beweis: siehe Homepage

Definition 10.3

Ist $b: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Biliniarform, so heißt die durch $q(u) := b(u,u)\ \forall u \in V$ definierte Funktion $q: V \to \mathbb{R}$ quadratische Funktion.
Man q positiv (semi-)definit, wenn b diese Eigenschaft hat.

Bemerkung

Ist V endlichdimensional, so gibt es nach Satz 1 zu jeder quadratischen Form $q: V \to \mathbb{R}$ einen selbstadjungierten Endomorphismus $L: V \to V$ mit

$$q(u) = (u|L(v))\ \forall u \in V \qquad (2)$$

Satz 10.4

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Raum und $Q: V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form mit der Darstellung (2).
Dann gibt es eine ONB $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus EV von L mit zugehörigen (reellen!) EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sodass gilt:

$$q(u) = \sum_{K=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2, \text{ falls } u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \qquad (3)$$

q ist genau dann positiv definit (bzw. positv semidefinit), wenn alle EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv (bzw. nicht negativ) sind.

Beweis
Nach 10.2/Theorem 1 existiert eine ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ aus EV von$L$ mit reellen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Also gilt: $L(v_k) = \lambda_k v_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Nun sei $u \in v$. Dann:

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \text{ mit } \alpha_k = (v_k|u) \,(\text{Koordinaten von } u \text{ bezüglich } v_k).$$

$$q(u) = (u|L(u)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \,(v_k|L(u) \qquad (4))$$

$$(v_k|L(u)) \overset{(L \text{ selbstadjungiert})}{=} (L(v_k)|u) = (\lambda_k v_k|u) = \lambda_k \,(v_k|u) = \lambda_k \alpha_k$$

Dies und (4) ergibt (3). Definitheitsaussage folgt aus (3).

■

Sei jetzt $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Sandard-SP, weiter sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, sei $L_{\underline{A}}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $L_{\underline{A}}\underline{x} := \underline{A}\,\underline{x} \;\forall \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $l_{\underline{A}}$ selbsadungt. Zugehörige quadratische Form gemäß (2):

$$q(\underline{x}) = \big(\underline{x}|L_{\underline{A}}(\underline{x})\big) = (\underline{x}|\underline{A}\,\underline{x}) = \underline{x}^T(\underline{A}\,\underline{x}) \quad (5)$$

Also explizit: $q(\underline{x}) = \big(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2\big) + (a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots)$

Folgerung 10.5 aus Satz 2

Sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $q(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{A}\,\underline{x} \;\forall \underline{x} \in \mathbb{R}$.
Dann gibt es eine ONB $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ von $\mathbb{R}^n$ aus EV von $\underline{A}$. Sei $\underline{B}$ die Matrix, derten k-te Spalte der Koordinatenvektor von $\underline{v}_k$ bezüglich der Standardbasis ist. Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $\underline{B}^T\underline{x} =: \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ der Koordinatenvektor von $\underline{x}$ bezüglich $(v_1, \ldots, v_n)$ (beachte $\underline{B}^{-1} = \underline{B}^T$), und es gilt:

$$q(\underline{x}) = q(\underline{B}\,\underline{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_1 y_n^2; \quad (6)$$

hierbei ist λ_k der EW von $\underline{A}$ zum EV $\underline{v}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Durch den Übergang von (5') zu (6) ist q in **rein quadratische** Form überführt.

Beweis
Aussage über EV folgt aus Satz 2. Mit $\underline{B}$ wie oben gilt

$$\underline{B}^{-1}\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nach Teorem 1. Da $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ ONB, ist $\underline{B}$ orthogonal, alsi gilt $\underline{B}^{-1} = \underline{B}^T$ (nach Satz 3). Es folgt

$$q(\underline{x})?q(\underline{B}\,\underline{y}) \overset{((5))}{=} (\underline{B}\,\underline{y})^T\underline{A}(\underline{B}\,\underline{y}) = (\underline{y}^T\underline{B}^T)\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{y} = \underline{y}^T(\underline{B}^T\underline{A}\,\underline{B})\underline{y} = \lambda_1 y_1^2 + \ldots \lambda_n y_n^2$$

■

Beispiel 10.1 Anwendung

Rotationsenergie eines starren Körpers ist:

$$T = \frac{1}{2}\underline{w}^T\underline{J}\underline{w}, \text{ hierbei } \underline{w} \text{ die Winkelgeschwindigkeit, } \underline{J} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ Matrix des Trägheitstensors}$$

Die EW von $\underline{J}$ heißen Hauptträgheitsmomente, die zugehörigen EV Hauptträgheitsrichtungen.

11 Affine Räume

11.1 Grundbegriffe

Anschauliche Vorbetrachtung: Sein E eine Ebene, $\underline{v}$ ein zu E paralleler Pfeil.
Zu jedem Punkt p von E gehört dann genau ein Punkt p' von E: $\underline{v}$ „anheften“ an p.

Definition 11.1 Mathematische Präzisierung

Gegeben seien nichtleere Mengen $\mathcal{A}$, ein $\mathbb{K}$- Vektorraum V und eine Abbildung, die jedem Paar $(p, \underline{v}) \in \mathcal{A} \times V$ ein Element $p \oplus \underline{v}$ von $\mathcal{A}$ zuordnet, so dass gilt:

(A1) $p \oplus (\underline{v} + \underline{w}) = (p \oplus \underline{v}) + \underline{w}\ \forall p \in \mathcal{A}\ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

(A2) $p \oplus \underline{v} = p \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}\ \forall p \in \mathcal{A},\ \forall \underline{v} \in V$

(A3) Zu allen $p, p' \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $\underline{v} \in v$ mit $p \oplus \underline{v} = p'$. Dann heißt $\mathcal{A}$ (genauer:$(\mathcal{A}, V, \oplus)$) affiner Raum bezüglich V. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Punkte, die Elemente von V Vektoren.

Bemerkung

(a) $\underline{v} + \underline{w}$ ist die Addition im Vektorraum V, $p \oplus \underline{v}$ ist eine Operation zwischen $p \in \mathcal{A}$ und $\underline{v} \in V$.

(b) Der jedem Paar $(p, p') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ eindeutig zugeordnete Vektor $\underline{v} \in V$ wird mit $\vec{pp'}$ bezeichnet, also

$$\underline{v} = \vec{pp'} :\Leftrightarrow p \oplus \underline{v} = p' \qquad (1)$$

Folgerung 11.2

Für alle $p, q, r \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr} \qquad (2)$$

$$\vec{qp} = -\vec{pq} \qquad (3)$$

Beweis

Zu (2):

$$p \oplus (\vec{pq} + \vec{qr}) \overset{(A1)}{=} \left(p \oplus \underbrace{\vec{pq}}_{v} \right) \oplus \vec{qr} = q \oplus \underbrace{\vec{qr}}_{v} \overset{(1)}{=} r$$

Nach (1) [mit $\underline{v} := \vec{pq} + \vec{qr}$] folgt (2)

zu (3):

$$\vec{pp} = \underline{v} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} p \oplus \underline{v} = p \overset{(A2)}{\Leftrightarrow} \underline{v} = \underline{o}$$

Also $\vec{pp} = \underline{o}$. Hiermit folgt:

$$\vec{pq} + \vec{qp} \overset{(2)}{=} \vec{pp} = \underline{o} \text{ und somit } \vec{qp} = -\vec{pq}$$

■

Satz 11.3 Standarddarstellung affiner Räume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Setzt man:

$$\mathcal{A}_V := V \text{ und } p \oplus \underline{v} := \underbrace{p + \underline{v}}_{\text{Addition in } V} \quad \forall p \in \mathcal{A}_V \; \forall \underline{v} \in V \qquad (*)$$

dann ist $\mathcal{A}_V$ ein affiner Raum bezüglich V, und es gilt:

$$\vec{pp'} = \underbrace{p' - p}_{\text{Subtr. in } V} \quad \forall p, p' \in \mathcal{A}_V$$

(b) Ist $\mathcal{A}$ ein beliebig affiner Raum bezüglich V, so gibt es eine bijektove Abbildung:

$$\Phi : \mathcal{A}_V \to \mathcal{A} \text{ mit } \Phi(p + \underline{v}) = \Phi(p) \oplus \underline{v} \; \forall p \in \mathcal{A}_V \; \forall \underline{v} \in V \qquad (4)$$

Beweis

(a) Aus Axiomen (V1) bis (V4) eines Vektorraumes folgen sofort die Axiome (A1) bis (A3). Weiter:

$$\underbrace{p}_{\in \mathcal{A}_V} \oplus \underbrace{(p' - p)}_{\in V} \overset{(*)}{=} p + (p' - p) = \underbrace{p'}_{\in \mathcal{A}_V},$$

nach (1) also $p' - p = \vec{pp'}$.

(b) Sei $p_0 \in \mathcal{A}$ gewählt. Definieren $\Phi(\underline{v}) := p_0 \oplus \underline{v} \; \forall \underline{v} \in V = \mathcal{A}_V$. Dann: $\Phi : \mathcal{A}_V \to \mathcal{A}$.
<u>Behauptung:</u> Φ bijektiv.
<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe

■

Beispiel 11.1 Standardbeispiel

$V = \mathbb{K}^n$ mit Spaltenvektoren $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$ (Vektoren).
Wähle $\mathcal{A} := \mathbb{K}_n$ mit Zeilenvektoren $p = (p_1, \ldots, p_n)$ (Punkte). Definiere:

$$p \oplus \underline{v} := p + \underline{v}^T = (p_1 + v_1, \ldots, p_n v_n) \qquad (5)$$

Dann ist $\mathbb{K}_n$ affiner Raum bezüglich $\mathbb{K}^n$. Sind $p, q \in \mathbb{K}_n$, dann gilt nach (1) und (5):

$$\vec{pq} = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n) \qquad (6)$$

Bijektive Abbildung $\Phi : \mathcal{A}_{\mathbb{K}^n} \to \mathbb{K}_n$:

$$\text{Mit } p_0 := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}_n \text{ ist } \Phi(\underline{v}) = (0, \ldots, 0) \oplus (v_1, \ldots, v_n)^T \overset{(5)}{=} (0 + v_1, \ldots, 0 + v_n) = \underline{v}^T \ \forall \underline{v} \in \mathbb{K}^n$$

Φ ist also die Transposition.

11.2 Affine Unterräume

Definition und Satz 11.1

Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum bezüglich V, U ein Untervektorraum von V mit $p \in \mathcal{A}$. Dann ist:

$$p \oplus U := \{p \oplus \underline{v} : \underline{vU}\} \text{ ein affiner Raum bezüglich } U$$

und heißt affiner Unterraum von $\mathcal{A}$. Es gilt:

$$p \oplus U = p' \oplus U \text{ mit } p' \in p \oplus U \text{ beliebig} \qquad (1)$$

Beweis
(A1) bis (A3) für $p \oplus U$ folgen aus entsprechenden Eigenschaften für $\mathcal{A}$.
Zu 1:
Sei $p' \in p \oplus U$ gegeben, also $p' = p \oplus \underline{w}$ mit einem $\underline{wU}$. Sei nun $x = p \oplus \underline{v} \in p \oplus u$ beliebig gegben. Setzen $\underline{v}' = \underline{v} - \underline{w}$. Dann $v'\underline{U}$ (da U Untervektorraum) und:

$$x = p \oplus \underline{v} = p \oplus (\underline{w} + \underline{v}') \overset{(A1)}{=} (p \oplus \underline{w}) \oplus \underline{v}' = p' \oplus v' \in p' \oplus U$$

Somit $p \oplus U \subset p' \oplus U$. Umkehrung analog.

■

Definition 11.2

Ist $\mathcal{A}$ affiner Raum bezüglich V. So heißt $\dim \mathcal{A} := \dim V$ Dimension von $\mathcal{A}$. Eindimensionale affine Räume heißen Geraden, zweidimensionale affine Räume heißen Ebenen. Ist $\mathcal{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum, so heißen die (n-1)-dimensionale affine Unterräume Hyperebenen.

Definition 11.3

Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum und $M \subset \mathcal{A}$ nichtleer. Der Durchschnitt aller affinen Unterräume von $\mathcal{A}$, die M enthalten, heißt affine Hülle von M. Bezeichnung: $\operatorname{aff}(M)$.

Satz 11.4

$\operatorname{aff}(M)$ ist selbst ein affiner Unterraum von $\mathcal{A}$, also der bezüglich $\subset$ kleinst affine Unterraum von $\mathcal{A}$, der M enthält.

Beweis: Übungsaufgabe

Definition und Satz 11.5 Geraden

Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum bezüglich V.

(a) Ist G Gerade in $\mathcal{A}$, so gibt es einen Vektor $\underline{v} \in V \neq \underline{o}$, sodass mit einem beliebigen $p \in G$ gilt:

$$G = p \oplus \operatorname{lin}\{\underline{v}\} = \{p \oplus \lambda\underline{v} : \lambda \in \mathbb{K}\} \qquad (2)$$

Die rechte Seite von (2) heißt Parameterdarstellung oder Parametrisierung von G mit Paramter λ.

(b) Gegeben seien Punkte $p, q \in \mathcal{A}$ mit $p \neq q$. Dann gilt:

$$\operatorname{aff}\{p, q\} = p \oplus \operatorname{lin}\{\vec{pq}\} = \{p \oplus \lambda\vec{pq} : \lambda \in \mathbb{K}\} \qquad (3)$$

Beweis

(a) Sei G Gerade, also eindimensionaler affiner Unterraum von $\mathcal{A}$. Dann gilt:

$$p \in \mathcal{A} \text{ und } \underline{v} \in V, \underline{v} \neq \underline{o}, \text{ sodass } G = p \oplus \operatorname{lin}(\underline{v}) = \{p \oplus \lambda\underline{v} : \lambda \in \mathbb{K}\}$$

(b) Da $\dim \operatorname{lin}\{\vec{pq}\} = 1$, ist $G_0 := p \oplus \operatorname{lin}\{\vec{pq}\}$ eine Gerade. Zu zeigen:

$$\operatorname{aff}\{p, q\} = G_0$$

Da $p \oplus 1 \cdot \vec{pq} = q$ (siehe 11.1/(1)), ist $q \in G_0$ auch $\in G_0$ (setzte $\lambda := 0$) und G_0 affiner Unterraum ist, gilt:

$$\operatorname{aff}\{p, q\} \subset G_0$$

Daher ist auch $1 = \dim \operatorname{aff}\{p, q\} \leq \dim G_0 = 1$ Zugehörige Untervektorräume stimmen also Überein. Sei U dieser Untervektorraum. Dann folgt:

$$\operatorname{aff}\{p, q\} = p \oplus U = G_0$$

■

Analog gilt:

Definition und Satz 11.6 Ebenen

Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum bezüglich V.

(a) Ist E Ebene in $\mathcal{A}$, so gibt es linear unabhängige Vektoren $\underline{v}, \underline{w} \in V$, sodass mit beliebigen $p \in E$ gilt:

$$E = \{p \oplus (\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \qquad (4)$$

Rechte Seite von (4) heißt Parameterdarstellung oder Parametrisierung von G mit Paramtern λ, μ.

(b) Gegeben seien Punkt $p, q, r \in \mathcal{A}$, sodass $\vec{pq}$ und $\vec{pr}$ linear unabhängig sind. Dann gilt:

$$\operatorname{aff}\{p, q, r\} = \{p \oplus (\lambda\vec{pq} + \mu\vec{pr}) : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \qquad (5)$$

Zusammenfassung:

$$x = p \oplus \lambda\underline{v}, \quad \lambda \in \mathbb{K}: \text{ Parameterdarstellung von } G \text{ (2')}$$

$$x = p \oplus (\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \text{ Parameterdarstellung von } E \ (5')$$

x : Variabler Punkt von G und E.
Speziel: $\mathcal{A} = \mathbb{K}_n$: Nach (11.1/(5)) gilt:

$$x = p + \lambda \underline{v}^T = (p_1, \ldots, p_n) + \lambda(v_1, \ldots, v_n), \quad \lambda \in \mathbb{K} \qquad (2")$$

$$x = p + (\lambda \underline{v}^T + \mu \underline{w}^T) = (p_1, \ldots, p_n) + \lambda(v_1, \ldots, v_n) + \mu(w_1, \ldots, w_n), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad (5")$$

Beispiel 11.1

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ Punkte $p = (-1, 2, 5), q = (3, 2, 1), r = (-1, 6, 2)$.
Dann $\underline{v} := \vec{pq} = (4, 0, -4)^T$ und $\underline{w} := \vec{pr} = (0, 4, -3)^T$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ (Beweis!).
Ebene E durch p, q, r :

$$x \overset{(5'')}{=} (-1, 2, 5) + \lambda(4, 0, -4)^T + \mu(0, 4, -3)^T, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3 \text{ variabler Punkt von } E$$

Definition und Satz 11.7 Hyperebenen

Sei H eine Hyperebene in affinen Raum $\mathbb{R}_n$. Dann gilbt es ein Vektor $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$H = \left\{ \underline{x}^T \in \mathbb{R}_n : (\underline{a}|\underline{x}) = a_0 \right\} \qquad (6)$$

Für beliebige $\underline{x}^T, \underline{y}^T \in H$ gilt $\underline{a} \perp (\underline{x} - \underline{y})$. Daher heißt $\underline{a}$ <u>Normalenvektor</u> von H.

Beweis
$H = \underline{q}^T \oplus \mathcal{U}$, also $\underline{q}^T \in \mathbb{R}_n$ und $\mathcal{U}$ $(n-1)$-dimensionaler UVR von $\mathbb{R}^n$.
Nach 9.4 Satz 2 ist $\dim \mathcal{U}^\perp = dim \mathbb{R}^n - \dim \mathcal{U} = 1$. Also gibt es $\underline{a} \in \mathbb{R}^n, \underline{a} \neq \underline{0}$, mit $\mathcal{U}^\perp = \text{lin}\{\underline{a}\}$. Nach 9.4 Satz 1 ist $\mathcal{U} \underset{(!)}{=} \mathcal{U}^{\perp\perp} = \{\underline{e} \in \mathbb{R}^n | \, (a|u) = 0\}$.

(a) Ist $\underline{x}^T \in H$, dann $\underline{x}^T = \underline{q}^T \oplus \underline{u} = \underline{q}^T + \underline{u}^T$, wobei $\underline{u} \in \mathcal{U}, (\underline{A} \perp \underline{u}) = 0$ Somit ist $(\underline{a}|\underline{x}) = (\underline{a}|\underline{u}) + (\underline{a}|\underline{u}) = \big(\underline{a}|\underline{q}\big) =: a_0$

(b) Ist $\underline{x}^T \in \mathbb{R}_n$ in rechter Seite von (6), dann $(\underline{a}|\underline{x}) = a_0 \, \big(\underline{a}|\underline{q}\big)$, sldo $\big(a|\underline{x} - \underline{q}\big) = 0, \underline{u} - \underline{q} \in \text{lin}\, \underline{a}^\perp = \mathcal{U}^{\perp\perp} = \mathcal{U}$ und daher $\underline{x} \in \underline{q} + \mathcal{U}$, also $\underline{x}^T \in \underline{q} \oplus \mathcal{U} = H$ Somit (6) bewiesen.
Sind $\underline{x}^T, \underline{y}^T \in H$, dann $(\underline{a}|\underline{x}) \overset{((6))}{=} a_0 = \big(\underline{a}|\underline{y}\big)$, also $\underline{a} \perp \underline{x} - \underline{y}$.

■

(6) ausführlich:

$$a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = a_0 \qquad (6')$$

Gleichung der Hyperebene H mit Normalenvektor $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.
(6) äquivalent mit:

$$\frac{(\underline{a}|\underline{x}) - a_0}{\|\underline{a}\|_2} = 0 \qquad (7)$$

ausführlich:

$$\frac{(a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n) - a_0}{\sqrt{a_1^1, \ldots, a_n^2}} = 0 \qquad (7')$$

<u>Hessesche Normalenform</u> der Gleichung von H

Definition 11.8

Ist M nichtleere Teilmenge des affinen Raumes $\mathbb{R}_n$ und $p \in \mathbb{R}_n$, dann heißt

$$d(p, M) := \inf_{r \in M} \|p - r\|_2 \ \underline{\text{Abstand}} \text{ des Punktes } p \text{ von } M.$$

Hierbei $\|\cdot\|_2 \in \mathbb{R}_n$ wie in $\mathbb{R}^n$ definiert. Ist $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}_n$, dann:

$$\|q\|_2 := \sqrt{q_1^2, \ldots, q_n^2}$$

Satz 11.9

Sei H eine Hyperebene in $\mathbb{R}_n$ und $\underline{p}^T \in \mathbb{R}_n$. Dann ist:

$$d(\underline{p}^T, H) = \frac{\left|\left(\underline{a}|\underline{p}\right) - a_0\right|}{\|\underline{a}\|_2} \qquad (8)$$

Hierbei ist $\frac{(\underline{a}|\underline{x}) - a_0}{\|\underline{a}\|_2} = 0$ die Hessesche Normalenform der Gleichung von H (mit variablen Punkt $\underline{x}^T \in H$)

Beweis

Sei $H = \underline{q}^T \oplus \mathcal{U}$. Dann gilt:

$$d(\underline{p}^T, H) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\| \underline{q} - (\underbrace{\underline{q}\underline{u}}_{=\underline{p}}) \right\|_2 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\| (\underline{p} - \underline{q}) - \underline{u} \right\|_2 = d(\underline{p} - \underline{q}, \mathcal{U})$$

$$\overset{(9.4 \text{ Satz } 3)}{=} \left\| \text{proj}_{\mathcal{U}}(\underline{p} - \underline{q}) \right\|_2 = \left\| \underline{p} - \underline{q} \right\|_2 \cdot |\cos\varphi| = \left| \left(\frac{a}{\|\underline{a}\|_2} | \underline{p} - \underline{q} \right) \right| = \frac{\left|\left(\underline{a}|\underline{p}\right) - \left(\underline{a}|\underline{q}\right)\right|}{\|\underline{a}\|_2}$$

Da $\underline{q}^T \in H$, gilt $\left(\underline{a}|\underline{q}\right) = a_0$.Hiermit folgt die Behauptung.

■

Beispiel 11.2

Gegeben: Ebene in Parameterdastellung:

$$E : x = \left(\underbrace{-1, 2, 5}_{p_0}\right) + \lambda \left(\underbrace{4, 0, -4}_{\underline{v}^t}\right) + \mu \left(\underbrace{0, 4, -3}_{\underline{w}^T}\right) ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

Weiter sei Punkt $p = (1, -2, 2)$ gegeben.
Gesucht: Abstand von p zu E.
Lösung: $\underline{v}$ und $\underline{w}$ sind parallel zu $\underline{E}$, also ist $\underline{a} := \underline{v} \times \underline{w}$ Normalenvektor von $\underline{E}$.

$$\underline{a} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & 4 & 0 \\ \underline{e}_2 & 0 & 4 \\ \underline{e}_3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $p_0 \in E$ (setze $\lambda = \mu := 0$).
Also Gleichung von E:

$$\left(\underline{a} | \underline{x} - \underline{p}_0\right) = 0 \text{ (Satz 5) } \Leftrightarrow 4(4x_1 + 3x_2 + 4x_3) = 88.$$

Mit $\|\underline{a}\|_2 = 4\sqrt{16 + 9 + 16} = 4\sqrt{41}$ folgt Hessesche Normalform:

$$\frac{4 \cdot (4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 22)}{4\sqrt{41}} = 0$$

Nach Satz 6 ist $d(p, E) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 - 22|}{\sqrt{41}} = \frac{|-16|}{\sqrt{41}} = \frac{16}{\sqrt{41}}$