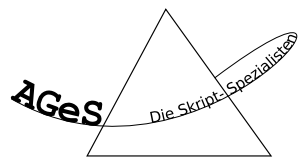


# ANALYSIS III FÜR PHYSIKER

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Werner Timmermann  
(Wintersemester 2007/08)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling  
Felix Lemke  
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort (zuerst lesen)</b>	<b>4</b>
<b>11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten des <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
11.3 Differentialformen . . . . .	5
11.4 Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	15
11.5 Der allgemeine Stokes'sche Integralsatz . . . . .	17
<b>12 Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>22</b>
12.1 Terminologie und Problemstellungen . . . . .	22
12.2 Elementare Lösungsmethoden . . . . .	22
12.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen . . . . .	22
12.2.2 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	23
<b>13 Existenz- und Eindeigkeitssätze</b>	<b>25</b>
13.1 Vorbereitungen, Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	25
13.2 Der Satz von Picard-Lindelöf. Weitere Existenzsätze . . . . .	27
13.3 Fortsetzung von Lösungen . . . . .	29
<b>14 Lineare Systeme erster Ordnung</b>	<b>31</b>
14.1 Das allgemeine lineare System erster Ordnung . . . . .	31
14.2 Die Matrixexponentialfunktion . . . . .	34
14.3 Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	38
14.4 Bemerkungen zur Stabilität von Lösungen . . . . .	40
<b>15 Bemerkungen zu Fourierreihen</b>	<b>43</b>
<b>16 Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen</b>	<b>47</b>
<b>17 Parabolische partielle Differentialgleichungen</b>	<b>51</b>
17.1 1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Homogene Aufgabe . . .	51
17.2 1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Inhomogene Aufgabe . .	54
<b>18 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen</b>	<b>55</b>
18.1 Die schwingende Saite . . . . .	55
18.1.1 Die d'Alembertsche Methode . . . . .	55
18.1.2 Die Fouriersche Methode . . . . .	57
18.1.3 Vergleich . . . . .	58
18.2 Bemerkungen zu den Maxwellschen Gleichungen . . . . .	59
18.3 Bemerkungen zur mehrdimensionalen Wellengleichung . . . . .	60
18.3.1 Eindimensionaler Fall . . . . .	61
<b>19 Elliptische partielle Differentialgleichungen</b>	<b>63</b>
19.1 Die dreidimensionale Aufgabe . . . . .	63

<b>20 Ausblick auf moderne Methoden zur Behandlung partieller Differentialgleichungen</b>	<b>68</b>
20.1 Der Begriff der Distribution . . . . .	68
20.2 Rechenoperationen mit Distributionen . . . . .	71
20.2.1 Ableitung von Distributionen . . . . .	71
20.2.2 Direktes Produkt von Distributionen . . . . .	72
20.2.3 Faltung von Funktionen und Distributionen . . . . .	73
20.3 Anwendung auf Differentialgleichungen . . . . .	74
20.3.1 Beispiel für eine schwache Lösung . . . . .	76
20.4 Bemerkungen zur Fouriertransformation . . . . .	79

# Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion  
[www.ages-skripte.org](http://www.ages-skripte.org)

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

# 11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

## 11.3 Differentialformen

Man kann Vektorfelder über Kurven integrieren:

$$\int_c \langle v, dx \rangle = \int_c (v_1 \cdot dx_1 + \dots + v_n \cdot dx_n)$$

Unser Ziel ist nun, diesen Zusammenhang auf Untermannigfaltigkeiten zu erweitern.

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.  $V^*$  ist der Vektorraum der linearen Funktionale auf  $V$  (d.h. der linearen Abbildungen von  $V$  nach  $\mathbb{R}$ ). Leicht zeigt man:  $\dim V^* = \dim V$

Sei nun  $(e_1, \dots, e_n)$  irgendeine feste Basis in  $V$ . (In  $V$  existiert zunächst kein Skalarprodukt, also ist es sinnlos, über Orthonormalbasen zu reden.) Dann existiert genau eine Basis  $(e^1, \dots, e^n)$  mit

$$e^i(e_j) = \delta_j^i$$

$(e^1, \dots, e^n)$  heißt **duale Basis** zu  $(e_1, \dots, e_n)$ .

### Definition 11.10

Eine Abb.  $\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} = V^r \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Multilinearform** (oder  $r$ -lin. Form über  $V$ ), wenn gilt:

$$\alpha(x_1, \dots, cx_i + dy_i, \dots, x_r) = c \cdot \alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r) + d \cdot \alpha(x_1, \dots, y_i, \dots, x_r) \quad \text{für } c, d \in \mathbb{R}$$

Das heißt,  $\alpha$  ist in jeder Komponente linear.

Der Vektorraum aller  $r$ -linearer Formen über  $V$  wird  $T_r(V)$  genannt.

Eine  $r$ -lineare Form über  $V$  nennt man auch  $r$ -fach **kovarianten Tensor** über  $V$ . (Entsprechend bezeichnet man eine  $r$ -lineare Form über  $V^*$  auch als  $r$ -fach **kontravarianten Tensor** über  $V$ .)

### Beispiele

- 1-lineare Formen sind gerade Elemente aus  $V^*$ .
- Skalarprodukte in  $V$  sind 2-lineare Formen.
- Seien  $f^1, \dots, f^r \in V^*$ . Definiere  $\alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^r$  durch

$$\alpha(x_1, \dots, x_r) = (f^1 \otimes \dots \otimes f^r)(x_1, \dots, x_r) := f^1(x_1) \cdot \dots \cdot f^r(x_r)$$

$\otimes$  heißt **Tensorprodukt**.  $\alpha$  ist eine  $r$ -lineare Form.

4. Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $V$ .  $x \in V$  hat dann die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i = x^i e_i \quad \text{mit} \quad x^i \in \mathbb{R}$$

**Einstein'sche Summenkonvention:** Über doppelt auftretende obere und untere Indizes wird summiert. Zum Beispiel für  $x_1, \dots, x_r \in V$ :

$$x_j = x_j^i e_i = \sum_{i=1}^n x_j^i e_i$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) := \det(x_j^i) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

5. Verallgemeinerung von 4. für  $x_1, \dots, x_r \in V$  mit  $r > n$ :

$$\alpha(x_1, \dots, x_r) := \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \cancel{x_1^i} & \cdots & \cancel{x_n^i} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^r & \cdots & x_n^r \end{vmatrix}$$

Streiche irgendwelche  $n - r$  Zeilen. Es bleiben Zeilen mit Indizes  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ . Dann bezeichnet man dieses  $\alpha$  etwa durch  $\alpha_{i_1 \dots i_r}$ .

### Definition und Satz 11.11

Eine  $r$ -lineare Form  $\alpha \in T_r(V)$  heißt **alternierend** oder kurz  **$r$ -Form**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\alpha^\pi = (\text{sign } \pi) \cdot \alpha$  mit  $\pi \in S_r$  (Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, r\}$ ,  $\text{sign } \pi$  ist das Vorzeichen von  $\pi$ , also  $+1$  bei gerader und  $-1$  bei ungerader Permutation)

$$\alpha^\pi(x_1, \dots, x_r) = \alpha(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)})$$

Mit anderen Worten: Bei Permutation der Argumente ändert sich nur das Vorzeichen.

$$\alpha(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(r)}) = (\text{sign } \pi) \cdot \alpha(x_1, \dots, x_r)$$

2.  $\alpha(x_1, \dots, x_r) = 0$ , wenn zwei Argumente gleich sind
3.  $\alpha(x_1, \dots, x_r) = 0$ , falls die  $x_1, \dots, x_r$  linear abhängig sind
4.  $\alpha(x_1, \dots, x_r)$  ändert das Vorzeichen, wenn zwei Elemente  $x_i$  und  $x_j$  vertauscht werden.

Die  $\alpha$  in den Beispielen 4 und 5 sind etwa  $r$ -Formen. Die Menge aller  $r$ -Formen nennen wir  $\bigwedge^r V^*$ .

### Fundamentalbeispiel

Seien  $f^1, \dots, f^r \in V^*$ . Definiere  $\alpha = f^1 \wedge \dots \wedge f^r$  mit

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^r)(x_1, \dots, x_r) := \det(f^i(x_j)) = \begin{vmatrix} f^1(x_1) & \cdots & f^1(x_r) \\ \vdots & & \vdots \\ f^r(x_1) & \cdots & f^r(x_r) \end{vmatrix}$$

für  $x_i \in V$ . Beachte hierbei: Mit  $f^i = f^j$  wird  $f^1 \wedge \dots \wedge f^r = 0$ .

Wir wollen nun eine Basis für den Vektorraum  $\bigwedge^r V^*$  finden. (Dann ist auch  $\dim \bigwedge^r V^*$  klar.) Wie üblich sei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Basis von  $V$  und  $(e^1, \dots, e^n)$  die dazu duale Basis in  $V^*$ . Betrachte den folgenden Hilfsraum:

$$A_r := \text{lin} \{ e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} : 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n \} \quad (11.6)$$

Ein typisches Element  $\alpha \in A_r$  hat offenbar die Gestalt:

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}$$

### Beispiel 11.3

$$\alpha = 4 \cdot e^1 \wedge e^7 + 8 \cdot e^1 \wedge e^4 + 12 \cdot e^6 \wedge e^{20} - \text{Hier ist } r = 2 \text{ und } n \geq 20.$$

Nun definieren wir zwischen solchen  $r$ - bzw.  $s$ -Formen das **Keilprodukt** bzw. **äußere Produkt**.

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \in A_r \quad \text{und} \quad \beta = \sum_{l_1 < \dots < l_s} d_{l_1 \dots l_s} \cdot e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s} \in A_s$$

Auf  $\alpha$  und  $\beta$  wirkt die Operation  $\wedge : (A_r, A_s) \rightarrow A_{r+s}$  wie folgt:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_r \\ l_1 < \dots < l_s}} c_{j_1 \dots j_r} d_{l_1 \dots l_s} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s} \in A_{r+s} \quad (11.7)$$

### Beispiel 11.4

Seien  $\alpha = 2 \cdot e^1 \wedge e^2$  und  $\beta = 3 \cdot e^1 + 4 \cdot e^2 + 5 \cdot e^3$ . Dann ist

$$\alpha \wedge \beta = (2 \cdot e^1 \wedge e^2) \wedge (3 \cdot e^1 + 4 \cdot e^2 + 5 \cdot e^3) = 6 \cdot \underbrace{e^1 \wedge e^2 \wedge e^1}_{=0} + 8 \cdot \underbrace{e^1 \wedge e^2 \wedge e^2}_{=0} + 10 \cdot e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = 10 \cdot e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$$

### Lemma 11.12

#### Eigenschaften des Keilproduktes

1. Bilinearität – Für  $\alpha \in A_r$ ,  $\beta \in A_s$  und  $c_i, d_i \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2) \wedge \beta &= c_1 \cdot (\alpha_1 \wedge \beta) + c_2 \cdot (\alpha_2 \wedge \beta) \\ \alpha \wedge (d_1 \beta_1 + d_2 \beta_2) &= d_1 \cdot (\alpha \wedge \beta_1) + d_2 \cdot (\alpha \wedge \beta_2) \end{aligned}$$

2. Für  $\alpha \in A_r$  und  $\beta \in A_s$  ist

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$$

3. Assoziativität – Für  $\alpha \in A_r$ ,  $\beta \in A_s$  und  $\gamma \in A_t$  ist

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

### Beweis

1. Folgt direkt aus der Definition, da alle Komponenten linear sind.

2. Aus der Definition folgt sofort für  $f^1, f^2 \in V^*$ :  $f^1 \wedge f^2 = -f^2 \wedge f^1$  (Vertauschung von Zeilen und Spalten in einer Determinante führt zum Vorzeichenwechsel). Generell liefert die Vertauschung zweier Elemente im Keilprodukt einen Vorzeichenwechsel. Um in

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s}$$

das Element  $e^{l_1}$  nach vorne zu bringen, muss man insgesamt  $r$  Vertauschungen von  $e^{l_1}$  mit seinem jeweiligen Vorgänger vornehmen. Also ist

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_s} = (-1)^r \cdot e^{l_1} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l_2} \wedge \dots \wedge e^{l_s}$$

Um alle Elemente  $e^{l_i}$  nach vorne zu bringen, benötigt man also  $r \cdot s$  Vertauschungen.

3. Dieser Beweis ist einfach, erfordert aber viel Schreibarbeit. ■

### Satz 11.13

Es ist  $A_r = \bigwedge^r V^*$  und  $\dim \bigwedge^r V^* = \binom{n}{r}$ . In Formel (11.6) ist  $\{\dots\}$  eine Basis für  $\bigwedge^r V^*$ .

### Beweis

Die Form  $\alpha \in \bigwedge^r V^*$  ist wegen der Multilinearität eindeutig bestimmt, wenn man alle  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  mit  $1 \leq i_k \leq n$  und  $1 \leq k \leq r$  kennt.

Da  $\alpha$  alterniert, genügt es, alle  $r$ -Tupel  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  zu betrachten. Davon gibt es  $\binom{n}{r}$  Stück. Soviele Formen stehen auch in  $\{\dots\}$  in Formel (11.6). Wir zeigen, dass diese linear unabhängig sind. Sei also

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} = 0 \quad (*)$$

Zu zeigen ist, dass alle  $c_{j_1 \dots j_r} = 0$  sind. Sei darin  $(j'_1, \dots, j'_r)$  ein festes  $r$ -Tupel und  $(k_1, \dots, k_{n-r})$  das dazu komplementäre  $(n-r)$ -Tupel (also die fehlenden  $n-r$  Zahlen). Aus (\*) folgt natürlich:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_{n-r}} = 0$$

In dieser Summe ist nur der Summand mit  $e^{j'_1} \wedge \dots \wedge e^{j'_r} \wedge e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_{n-r}}$  ungleich Null. Es verbleibt

$$c_{j'_1 \dots j'_r} \cdot e^{j'_1} \wedge \dots \wedge e^{j'_r} \wedge e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_{n-r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{j'_1 \dots j'_r} = 0$$

### Bemerkung

- Die Darstellung  $\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}$  nennt man **Standarddarstellung** von  $\alpha$ .
- Aus diesem Satz erkennt man den Sinn der Notation  $\bigwedge^r V^* = V^* \wedge \dots \wedge V^*$ .



Die folgende Operation ist typisch für viele Situationen in der Mathematik.

**Definition 11.14** Rücktransport, „Pullback“

Seien  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume. Dann induziert die lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung  $\varphi^* : T_r(W) \rightarrow T_r(V) \forall r$  gemäß

$$(\varphi^*\alpha)(u_1, \dots, u_r) := \alpha(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)) \quad \text{mit} \quad \alpha \in T_r(W) \quad \text{und} \quad u_1, \dots, u_r \in V$$

Die  $r$ -lineare Form  $\varphi^*\alpha$  heißt **Pullback** von  $\alpha$  bzgl.  $\varphi$ . Es ist  $\varphi^*\alpha \in T_r(V)$  mit den Eigenschaften:

- $\varphi^*(\bigwedge^r W^*) = \bigwedge^r V^*$  – Das heißt,  $\varphi^*$  erhält das Alternierungsverhalten.
- $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$  für zwei lineare Abbildungen  $\varphi : V \rightarrow W$  und  $\psi : W \rightarrow X$
- $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$  für  $\varphi : V \rightarrow W$ ,  $\alpha \in \bigwedge^r V^*$  und  $\beta \in \bigwedge^s V^*$

Unser nächstes Ziel ist die Definition und Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Wir wissen:  $M$  ist eine Mannigfaltigkeit, der für jedes  $p \in M$  ein Tangentialraum  $T_pM$  zugeordnet ist. Damit ist automatisch der dazu duale Raum  $(T_pM)^* =: T_p^*M$  gegeben.

Wir starten mit der Definition von Differentialformen in offenen Mengen  $U \subset \mathbb{R}^n$ .  $U$  sei eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, somit gilt für alle  $p \in U$ :

$$T_pU \cong \mathbb{R}^n \cong T_p^*U \cong (\mathbb{R}^n)^*$$

Hierbei heißt  $X \cong Y$ :  $X$  ist zu  $Y$  isomorph. Die Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  im  $\mathbb{R}^n$  sei die Standardbasis.

**Definition 11.15**

1. Ein **Vektorfeld**  $v$  in  $U$  ist eine Abbildung  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Genauer:  $p \in U \mapsto v(p) \in T_pU \cong \mathbb{R}^n$ .
2. Eine **Differentialform** vom Grade  $r$  in  $U$  ist eine Abbildung  $\omega : U \rightarrow \bigwedge^r (\mathbb{R}^n)^*$ .  
Genauer:  $p \in U \mapsto \omega(p) \in \bigwedge^r T_p^*U \cong \bigwedge^r (\mathbb{R}^n)^*$ .

Grob gesprochen ist  $\omega(p)$  für jedes  $p \in U$  eine  $r$ -Form. Die Menge aller Differentialformen vom Grade  $r$ , die ebenfalls kurz  $r$ -Formen genannt werden, bezeichnet man mit  $\Omega^r(U)$ .

Man sagt, eine Differentialform  $\omega \in \Omega^r(U)$  ist  $k$ -mal stetig differenzierbar, wenn für alle  $r$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  mit  $v_i \in \mathbb{R}^n$  die Abb.  $U \ni p \mapsto \omega(p)(v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist.

Differentialformen vom Grade Null sind Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Koordinatendarstellung von Differentialformen

Seien  $x^1, \dots, x^n$  die kanonischen Koordinatenfunktionen in  $\mathbb{R}^n$  bzw. in  $U$ , also

$$x^i(p) = x^i(p^1, \dots, p^n) = p^i \quad \text{mit} \quad p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n$$

$dx^i$  seien die zugehörigen Koordinatendifferentiale.  $dx^i(p) = dx^i$  ist eine von  $p$  unabhängige lineare Abbildung  $dx^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dx^i(h) = h^i$  für  $h \in \mathbb{R}^n$ . (Hierbei ist  $dx^i$  die lineare Abbildung  $dx^i(p)$ , die auf  $h$  angewendet wird.) Im Speziellen ist

$$dx^i(e_j) = \delta_j^i$$

Das heißt,  $(dx^1, \dots, dx^n)$  ist gerade die duale Basis zur kanonischen Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ , also ist  $e^i = dx^i \in (\mathbb{R}^n)^*$ . In der Koordinatendarstellung entspricht  $dx^i$  einem Vektor  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  mit der 1 an der  $i$ -ten Stelle. Damit hat man für alle  $p$  eine Basis für  $\bigwedge^r T_p^*U \cong \bigwedge^r (\mathbb{R}^n)^*$ :

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\} \quad (11.8)$$

Damit hat man für jedes  $\omega \in \Omega^r(U)$  die Standarddarstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (11.9)$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen  $f_{i_1 \dots i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind alle  $f_{i_1 \dots i_r}$   $k$ -mal stetig differenzierbar, ist auch  $\omega$   $k$ -mal stetig differenzierbar.

**Beispiel 11.5** für das Rechnen mit Koordinatendifferentialen

Sei  $n = 2$  und  $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $(dx^1 \wedge dx^2)(u, v) = \begin{vmatrix} dx^1(u) & dx^1(v) \\ dx^2(u) & dx^2(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix}$ .

## Algebraische Rechenregeln für Differentialformen

Alle allgemeinen Operationen werden punktweise definiert:

1. Für  $\omega, \sigma \in \Omega^r(U)$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$(\omega + \sigma)(p) = \omega(p) + \sigma(p) \quad \text{und} \quad (f \cdot \omega)(p) = f(p) \cdot \omega(p) \quad \forall p \in U$$

2. Für  $\omega \in \Omega^r(U)$  und  $\tau \in \Omega^s(U)$ , dann ist  $\omega \wedge \tau \in \Omega^{r+s}(U)$  und es gilt

$$(\omega \wedge \tau)(p) = \omega(p) \wedge \tau(p)$$

Insbesondere gilt für  $f \in \Omega^0(U)$ :

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f \cdot \omega$$

Man kann mit Differentialformen bereits rechnen, wenn man die Rechenregel

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

beachtet. Insbesondere ist  $dx^i \wedge dx^i = 0$ .

## Die äußere Ableitung (Cartan'sche Ableitung) von Differentialformen

### Definition 11.16

1. Die **äußere Ableitung** einer 0-Form  $f \in C^k(U)$  ist

$$df := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \quad \text{gemäß Summenkonvention}$$

Dies ist das übliche Differential. Es ist  $f \in \Omega^0(U)$  und  $df \in \Omega^1(U)$ .

2. Sei  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ . Dann ist die äußere Ableitung  $d\omega \in \Omega^{r+1}(U)$  definiert durch

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} df_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Dies ist nicht die Standarddarstellung von  $d\omega$ ! Man schreibt statt  $d$  auch  $d_r$ , wenn man sich auf ein bestimmtes  $r$  bezieht.

### Standardbeispiele

1. Sei  $n = 2$ ,  $r = 1$  und  $\omega = Pdx + Qdy$  ( $P$  und  $Q$  sind Funktionen von  $x$  und  $y$ ).

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \cancel{\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \wedge dx} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \wedge dy + \cancel{\frac{\partial Q}{\partial y} \cdot dy \wedge dy} \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy \end{aligned}$$

Dies ähnelt dem Satz vom Gauss im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\int_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial B} (Pdx + Qdy)$$

2. Sei  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^i$ , also ist  $d\omega = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) \cdot dx^i \wedge dx^j$ .

Betrachte für  $n = 3$  den Spezialfall  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ .

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy$$

Dies ist keine Standarddarstellung. Für ein Vektorfeld  $v = (P, Q, R)^T$  sind die Koeffizienten oben gerade die Komponenten von  $\text{rot } v$ . Die Formel ähnelt dem Satz von Stokes.

3. Sei  $n = 3$  und  $\omega = P \cdot dy \wedge dz + Q \cdot dz \wedge dx + R \cdot dx \wedge dy$ , dann ist

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

Diese Formel ähnelt dem Satz vom Gauss im  $\mathbb{R}^3$ .

**Satz 11.17** Eigenschaften der äußeren Ableitung

1. Die Funktion  $d_r : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$  ist linear:

$$d(\lambda\omega + \mu\sigma) = \lambda \cdot d\omega + \mu \cdot d\sigma \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \omega, \sigma \in \Omega^r(U)$$

2. Für  $\omega \in \Omega^r(U)$  und  $\sigma \in \Omega^s(U)$  ist

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \cdot \omega \wedge d\sigma$$

3. Für  $\omega \in \Omega^r(U)$  ist

$$d_{r+1}(d_r\omega) = 0$$

Allgemein ist  $d^2 = d \circ d = 0$ .

**Beweis**

Statt  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$  schreiben wir im Folgenden kurz  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$ .  $I$  durchläuft alle  $r$ -Tupel  $(i_1, \dots, i_r)$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ .

1. Folgt sofort aus der Definition.

2. Zuerst sei  $r = s = 0$ , also sind  $f, g \in C^1(U)$ . Beachte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \Rightarrow d(f \wedge g) &\equiv d(fg) = (df)g + f(dg) = df \wedge g + f \wedge dg \end{aligned} \quad (11.10)$$

Nun sei allgemein  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$  und  $\sigma = \sum_{|J|=s} g_J \cdot dx^J$ .

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d\left(\sum_{I,J} f_I \cdot g_J \cdot dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= \sum_{I,J} d(f_I \cdot g_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} (g_J \cdot df_I + f_I \cdot dg_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} g_J \cdot df_I \wedge dx^I \wedge dx^J + f_I \cdot dg_J \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} g_J \cdot df_I \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^r \cdot f_I \cdot dx^I \wedge dg_J \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \cdot \omega \wedge d\sigma \end{aligned}$$

3. Der Beweis erfolgt durch Anwendung des Satzes von Schwarz. Zuerst sei  $r = 0$ : Für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i$  und somit

$$d(df) = \sum_{i < j} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)}_{=0} \cdot dx^i \wedge dx^j = 0$$

Nun sei allgemein  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$  und somit  $d\omega = \sum_{|I|=r} df_I \wedge dx^I$ . Unter Anwendung von 2. ist

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{|I|=r} d(df_I \wedge dx^I) \\ &= \sum_{|I|=r} \underbrace{d(df_I)}_{=0} \wedge dx^I - df_I \wedge d(dx^I) \end{aligned}$$

Auch der zweite Summand verschwindet wegen

$$d(dx^I) = d(1dx^I) = \underbrace{d(1)}_{=0} \wedge dx^I = 0$$

■

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.

1. Eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(U)$  heißt **geschlossen**, wenn  $d\omega = 0$ .
2. Eine stetige  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(U)$  ( $k \geq 1$ ) heißt **exakt** oder **total**, wenn es eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\sigma$  gibt mit  $d\sigma = \omega$ .

Der dritte Teil von Satz 11.17 besagt demnach, dass eine exakte  $k$ -Form immer geschlossen ist.

**Lemma 11.18** Lemma von Poincaré

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig. Für eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  in  $U$  mit  $k \geq 1$  gilt:

$$\omega \text{ ist geschlossen} \iff \omega \text{ ist exakt}$$

## Pullback (Rücktransport) von Differentialformen

Dies ist fundamental für die Integration von Differentialformen. Sei  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte Abbildung zwischen offenen Mengen. Die Elemente von  $V$  seien als  $(t^1, \dots, t^m)$  bezeichnet, die von  $U$  heißen  $(x^1, \dots, x^n)$ . Also ist

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi^1(t^1, \dots, t^m) \\ \vdots \\ \varphi^n(t^1, \dots, t^m) \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung  $\varphi$  induziert eine Abbildung  $\varphi^* : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^r(V)$  wie folgt: Für  $f \in \Omega^0(U)$  ist  $\varphi^*f = f \circ \varphi \in \Omega^0(V)$ .

**Definition 11.19**

Seien  $U, V$  und  $\varphi$  wie oben und  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(U)$ . Dann heißt

$$\varphi^*\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_r} (f_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi) \cdot d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_r} \quad (11.11)$$

**Rücktransport** (Pullback) von  $\omega$  unter  $\varphi$ .

**Bemerkung**

Man berechnet  $\varphi^*\omega$ , indem man in (11.11) einsetzt:  $d\varphi^{i_k} = \sum_j \frac{\partial \varphi^{i_k}}{\partial t^j} \cdot dt^j$

**Beispiel 11.6**

Sei  $r = 1$ , also  $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx^j$ . Der Rücktransport von  $\omega$  bzgl. einem  $\varphi$  ist

$$\varphi^* \omega = \sum_{j=1}^n (f_j \circ \varphi) \cdot d\varphi^j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m f_j \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i} \cdot dt^i \right)$$

Wähle ein beliebiges  $v = (v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ . Mit  $\varphi' = \left( \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i} \right)$  ist

$$\begin{aligned} (\varphi^* \omega)(t)(v) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f_j(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i}(t) \cdot dt^i(v) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f_j(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial t^i}(t) \cdot v^i \\ &= \sum_{j=1}^n f_j(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t) \cdot v)^j \\ (\varphi^* \omega)(t)(v) &= \omega(\varphi(t))(\varphi'(t) \cdot v) \end{aligned}$$

Hier finden wir die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \varphi &: V \rightarrow U \\ \varphi'(t) &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{linear} \\ \omega &\in \Omega^r(U) \\ \varphi^* \omega &\in \Omega^r(V) \end{aligned}$$

$$(\varphi^* \omega)(t)(v_1, \dots, v_r) = \omega(\varphi(t))(\varphi'(t) \cdot v_1, \dots, \varphi'(t) \cdot v_r)$$

Links steht die „neue“ Form, angewendet auf die ursprünglichen Vektoren. Rechts steht die „alte“ Form am Bildpunkt  $\varphi(t)$ , angewendet auf die Bildvektoren  $\varphi'(t)v_i$ .

**Satz 11.20** Eigenschaften von  $\varphi^*$ 

Seien  $U, V$  und  $\varphi$  wie oben. Außerdem seien  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^r(U)$ ,  $\sigma \in \Omega^s(U)$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

1. Linearität:  $\varphi^*(\lambda \cdot \omega_1 + \mu \cdot \omega_2) = \lambda \cdot \varphi^* \omega_1 + \mu \cdot \varphi^* \omega_2$
2. Multiplikativität:  $\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = \varphi^* \omega \wedge \varphi^* \sigma$
3. Vertauschbarkeit mit der äußeren Ableitung:  $d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega)$
4. Kettenregel: Für offenes  $W \subset \mathbb{R}^p$  sowie ein stetig differenzierbares (oder glattes)  $\psi : W \rightarrow V$  ist

$$(\varphi \circ \psi)^* \omega = \psi^*(\varphi^* \omega)$$

**Beweis** 1, 2 und 4 folgen direkt aus der Definition.

3. Zunächst sei  $r = 0$ , also ist  $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} d(\varphi^* f) &= d(f \circ \varphi) = df(\varphi^1(t^1, \dots, t^m), \dots, \varphi^n(t^1, \dots, t^m)) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t^j} \cdot dt^j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \cdot dt^j \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \right) d\varphi^i \end{aligned}$$

Nun sei allgemein  $\omega = \sum_{|I|=r} f_I \cdot dx^I$ . Unter Anwendung von 2. ist

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega &= \sum_I (f_I \circ \varphi) d\varphi^I \\ d(\varphi^*\omega) &= \sum_I d(f_I \circ \varphi) \wedge d\varphi^I \\ &= \sum_I \varphi^*(df_I) \wedge d\varphi^I \\ &= \sum_I \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^*(dx^I) \\ &= \sum_I \varphi^*(df_I \wedge dx^I) \\ &= \varphi^*(d\omega)\end{aligned}$$



## 11.4 Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Nun sollen  $k$ -Formen auf  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  integriert werden. Der Ansatz ist, mit einer Parameterdarstellung die  $k$ -Form in den  $\mathbb{R}^k$  zurückzutransportieren. (Ein Spezialfall sind Vektorfelder, sprich 1-Formen.) Die Orientierung der Mannigfaltigkeit spielt nun eine wichtige Rolle (siehe Kurvenintegral).

Zuerst integrieren wir  $k$ -Formen im  $\mathbb{R}^k$ .

### Definition 11.21

Sei  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$  eine  $k$ -Form in  $U$  mit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\omega$  heißt über die Teilmenge  $A \subset U$  **integrierbar**, wenn  $f$  über  $A$  im gewöhnlichen Riemannschen Sinne integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_A \omega := \int_A f(x) dx = \int_A f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \quad (11.13)$$

Bei der Integration spielt die Orientierung eine Rolle. Zunächst zeigen wir das folgende Lemma.

### Lemma 11.22

Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus.  $\omega$  sei eine stetige  $k$ -Form auf  $V$  und  $A \subset U$  kompakt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(A)} \omega &= \int_A \varphi^*\omega && \text{falls } \varphi \text{ orientierungserhaltend ist, d.h. } \det \varphi' > 0 \text{ in } U \\ \int_{\varphi(A)} \omega &= - \int_A \varphi^*\omega && \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist, d.h. } \det \varphi' < 0 \text{ in } U\end{aligned}$$

### Beweis

Für  $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$  ist (hier ohne Beweis)

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi) \cdot d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^k \stackrel{!}{=} (f \circ \varphi) \cdot \det \varphi' \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

Damit folgt nach der Transformationsformel für Mehrfachintegrale

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\det \varphi'(x)| dx = \int_A \varphi^* \omega \cdot \text{sign}(\det \varphi'(x))$$

■

Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .  $\omega$  sei eine  $r$ -Form auf  $M$ , also eine Abbildung  $\omega : x \in M \mapsto \omega(x) \in \bigwedge^r T_x^* M$ , d.h.  $\omega(x)$  ist eine alternierende Multilinearform über dem Tangentialraum  $T_x M$ .

Am einfachsten ist es, wenn  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $M \subset U$  ist.  $\omega$  ist eine  $r$ -Form in  $U$ . Dann wird  $\omega$  auf  $M$  eingeschränkt. Für  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$  sind die  $f_{i_1 \dots i_r}$  in ganz  $U$  definiert, wenn aber nur für  $p \in M$  betrachtet. Obwohl  $\omega(p)$  dann für alle  $r$ -Tupel  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  definiert wäre, wird  $\omega(p)$  nur auf  $x_1, \dots, x_r \in T_p M$  angewendet. Da  $\dim T_p M = k$ , existieren nur für  $r \leq k$  nichttriviale Formen. Mit  $\Omega^r(M)$  soll die Menge aller  $r$ -Formen auf  $M$  bezeichnet werden.

Als nächstes soll  $\int_A \omega$  für  $\omega \in \Omega^k(M)$  definiert werden. Hierbei ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \subset M$  kompakt. Die Definition geschieht in zwei Schritten:

1. Angenommen, es existiert eine positiv orientierte (d.h. orientierungserhaltende) lokale Parameterdarstellung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Phi(T) \subset M$  mit  $A \subset \Phi(T)$ . Dann ist

$$\int_A \omega := \int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^* \omega \quad (11.14)$$

Analog zu Lemma 11.21 zeigt man, dass diese Definition von der Parameterdarstellung unabhängig ist, d.h. wenn  $\Phi_1 : T_1 \rightarrow \Phi_1(T_1) \supset A$  eine andere positiv orientierte Parameterdarstellung ist, dann gilt

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^* \omega = \int_{\Phi_1^{-1}(A)} \Phi_1^* \omega$$

2. Wenn  $A$  nicht in einem Kartengebiet enthalten ist, dann verwendet man wie in 11.1 die Zerlegung der Eins. Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  in der Vereinigung endlich vieler Kartengebiete enthalten. Also enthält die Zerlegung der Eins nur endlich viele Funktionen. Nach dem ersten Schritt ist das Integral von  $\omega$  über  $A$  dann durch eine endliche Summe definiert.

## Zusammenfassung

1. Sei  $T \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $\omega = f \cdot dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \in \Omega^k(T)$  und  $B \subset T$  kompakt.

$$\int_B \omega := \int_B f(t) dt$$

Rechts steht ein R-Integral einer Funktion von  $k$  Variablen.

2. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $M \subset U$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $\omega \in \Omega^k(M)$  (genauer:  $\omega \in \Omega^k(U)$ , eingeschränkt auf  $M$ ) und  $A \subset M$  kompakt.



Fall (a) Es gibt eine positiv orientierte Parametrisierung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Phi(T) \subset M$  mit  $A \subset \Phi(T)$ .

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \Phi^* \omega &= f \cdot dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k && \text{(erklärt in } B := \Phi^{-1}(A)) \\ \int_A \omega &= \int_B \Phi^* \omega = \int_B f(t) dt\end{aligned}$$

Fall (b) Es gibt kein solches  $\Phi$ : Wende die Zerlegung der Eins an.

## 11.5 Der allgemeine Stokes'sche Integralsatz

Wir benötigen Mannigfaltigkeiten mit Rand, denn der Satz lautet für  $M$  mit dem Rand  $\partial M$ :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Der noch zu erklärende Rand einer Mannigfaltigkeit ist streng zu unterscheiden vom sogenannten topologischen Rand der Menge  $M$ . Diesen Rand kennen wir schon.

**Beispiel 11.7** für den Unterschied zwischen topologischem und Mannigfaltigkeitsrand

1.  $K$  sei eine abgeschlossene Kreisscheibe im  $\mathbb{R}^2$ . Deren topologischer Rand, die äußere Begrenzungslinie der Scheibe, ist auch deren Mannigfaltigkeitsrand. Dieselbe Scheibe als offene Menge hat denselben topologischen Rand, aber keinen Rand als Mannigfaltigkeit.
2.  $Z$  sei ein Zylinder im  $\mathbb{R}^3$  ohne oberen und unteren Deckel. Im topologischen Sinne ist der Rand von  $Z$  gerade  $Z$  selber. Als zweidimensionale Mannigfaltigkeit sind die Begrenzungslinien des oberen und unteren Deckels des Zylinders der Rand von  $Z$ .

Es muss also eine Definition des Randes einer Mannigfaltigkeit gefunden werden. Der gewünschte Rand soll eine Mannigfaltigkeit einer um 1 niedrigeren Dimension sein und bei einer orientierten Mannigfaltigkeit ebenfalls orientiert sein.

Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_-^k &= \{(t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \leq 0\} = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1} \\ \partial \mathbb{R}_-^k &= \{(t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}\end{aligned}$$

Eine Teilmenge  $T \subset \mathbb{R}_-^k$  heißt **offen bezüglich**  $\mathbb{R}_-^k$ , wenn eine offene Menge  $T' \subset \mathbb{R}^k$  existiert mit  $T = T' \cap \mathbb{R}_-^k$ . Das heißt,  $T$  ist entweder bereits offen oder lässt sich in  $\mathbb{R}^k \setminus \mathbb{R}_-^k$  so fortsetzen, dass eine offene Menge entsteht.

### Definition 11.23

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  **$k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es um jeden Punkt  $p \in M$  eine lokale Parameterdarstellung (bzw. Karte)

$$\Phi : T \rightarrow W = \Phi(T) \subset M \quad \text{mit} \quad p \in \Phi(T)$$

gibt, wobei  $T$  offen in  $\mathbb{R}_-^k$  sein muss. Der Punkt  $p$  heißt **Randpunkt** von  $M$ , wenn  $p = \Phi(t)$  mit  $t \in T \cap \partial \mathbb{R}_-^k$ , d.h.  $t = (0, t^2, \dots, t^k)$ . Die Menge aller Randpunkte von  $M$  wird mit  $\partial M$  bezeichnet. Parameterdarstellungen  $\Phi$  mit  $T \cap \partial \mathbb{R}_-^k \neq \emptyset$  heißen **randadaptiert** (analog für Karten  $(W, \Phi^{-1})$ ).

**Satz 11.24**

Sei  $M$  eine berandete Mannigfaltigkeit der Dimension  $k$ .

1.  $\partial M$  ist eine  $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.
2. Ist  $M$  orientierbar, dann auch der Rand  $\partial M$  (und zwar in kanonischer Weise).

**Beweis** hier nicht, nur das Konzept

Sei  $p \in \partial M$  und  $(\Phi, T)$  eine lokale Parameterdarstellung um  $p$ . Wir betrachten die Menge  $\widehat{T} := \{u \in \mathbb{R}^{k-1} : (0, u) \in T\}$  mit  $\widehat{\Phi}(u) = \Phi(0, u)$ . Dann ist  $(\widehat{\Phi}, \widehat{T})$  eine lokale Parameterdarstellung um  $p \in \partial M$  als  $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für  $\partial M$  gibt es jetzt keine randadaptierten Parameterdarstellungen mehr, also ist  $\partial(\partial M) = \emptyset$ . ■

## Orientierung des Randes

„**Kanonische Orientierung**“ bedeutet, dass  $\partial M$  die im Folgenden beschriebene von  $M$  **induzierte Orientierung** trägt.

Sei  $p \in \partial M$  und  $(\Phi, T)$  eine randadaptierte Parameterdarstellung um  $p$ .  $\Phi$  soll immer in  $T$  (bzw. in  $T'$ , der Erweiterung von  $T$  auf  $\mathbb{R}^k$ ) stetig differenzierbar sein. Dann ist die Ableitung eine lineare Abbildung  $\Phi'(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Den Vektor  $v = \Phi'(t)(e_1) \in T_p M$  nennt man **nach außen zeigend**. Wir nennen eine Basis  $(w_1, \dots, w_{k-1})$  von  $T_p(\partial M)$  **positiv orientiert**, wenn  $(v, w_1, \dots, w_{k-1})$  in  $T_p M$  positiv orientiert ist.

*Wichtiger Spezialfall:* Sei  $M = \mathbb{R}_-^k$ , dann ist  $\partial M = \partial \mathbb{R}_-^k$  die durch  $\{t : t^1 = 0\}$  beschriebene  $(k - 1)$ -dimensionale Hyperebene. In jedem Punkt ist der äußere Normaleneinheitsvektor gerade  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Der Rand  $\partial \mathbb{R}_-^k$  kann durch eine einzige Parameterdarstellung beschrieben werden:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{k-1} & \rightarrow & \partial \mathbb{R}_-^k \\ t = (t^1, \dots, t^{k-1}) & \mapsto & (0, t^1, \dots, t^{k-1}) \end{cases}$$

Dann entspricht  $n = e_1$  der positiven Orientierung.

*Wiederholung:* Für Funktionen  $f$  definiert man den Träger

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in D(f) : f(x) \neq 0\}}$$

**Beispiel 11.8**

Für  $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$  ist  $\text{supp } f = [a, b]$ . Bei  $x = a$  und  $x = b$  verschwindet die Fkt. auch im Träger!

Analog setzt man für eine Differentialform  $\omega \in \Omega^k(M)$ :

$$\text{supp } \omega := \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$$

Der nächste Satz ist der Satz von Stokes für den Halbraum  $\mathbb{R}_-^k$ . Der allgemeine Fall wird hierauf zurückgeführt.

**Satz 11.25**

Sei  $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^k} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^k} \omega \quad (11.15)$$

**Beweis**

Sei  $\omega$  in der Standarddarstellung gegeben:

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \cdot f_j \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^k$$

Hierbei bedeutet  $\widehat{dx^j}$ , dass  $dx^j$  weggelassen wird.  $\omega$  hat einen kompakten Träger, d.h. es existiert eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^k$ , außerhalb derer alle  $f_j$  verschwinden. Dann gilt:

$$d\omega = \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

Wir nehmen die oben beschriebene Parameterdarstellung  $\Phi$  für den Rand:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{k-1} & \rightarrow \partial\mathbb{R}^k \\ t = (t^1, \dots, t^{k-1}) & \mapsto (0, t^1, \dots, t^{k-1}) \end{cases}$$

Dann ist

$$\Phi^*\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \cdot (f_j \circ \Phi) \cdot d\Phi^1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\Phi^j} \wedge \dots \wedge dx^k \quad (11.16)$$

Aus der Parameterdarstellung folgt sofort:

$$d\Phi^1 = 0 \quad \text{und} \quad d\Phi^j = dt^{j-1} \quad \text{für} \quad j = 2, \dots, k$$

Somit bleibt in (11.16) nur ein Summand:

$$(\Phi^*\omega)(t) = f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) \cdot dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k-1}$$

Dies setzen wir in (11.14) (Integration von Differentialformen) ein.

$$\int_{\partial\mathbb{R}^k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Phi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} \quad (11.17)$$

Damit haben wir den rechten Teil der Gleichung (11.15) beschrieben und betrachten nun den linken Teil. Beachte:  $\mathbb{R}^k_- = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$ .

$$\int_{\mathbb{R}^k_-} d\omega = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}} \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \dots dx^k$$

Außerhalb von  $K$ , also insbesondere im Unendlichen, verschwinden alle  $f_j$ .

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^k) dx^1 = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^k) dx^1 = f_1(0, x^1, \dots, x^k) - 0$$

Für alle anderen Variablen gilt:

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^k = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^j \right] dx^1 \dots \widehat{dx^j} \dots dx^k$$

Insgesamt bleibt nur der Anteil mit  $f_1$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x^2, \dots, x^k) dx^2 \dots dx^k \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}_-^k} \omega \end{aligned}$$

■

### Theorem 11.26 Theorem von Stokes

Sei  $M$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit dem Rand  $\partial M$ , der die induzierte Orientierung trägt. Ferner sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form auf  $M$  mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (11.18)$$

#### Beweis

Wir nehmen zur Vereinfachung o.B.d.A. an, dass eine Parameterdarstellung  $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  mit  $\text{supp } \omega \subset \Phi(T)$  gibt. Ansonsten müsste man in geeigneter Weise mit der Zerlegung der Eins arbeiten.

Wir setzen den Rücktransport  $\Phi^*\omega$  (dessen Träger in  $T$  enthalten ist) auf ganz  $\mathbb{R}_-^k$  mit Null fort zu einer stetig differenzierbaren Differentialform. Da  $M$  berandet ist, gibt es für  $T$  zwei Möglichkeiten:

1.  $T$  ist offen in  $\mathbb{R}_-^k$  und  $T \cap \partial \mathbb{R}_-^k = \emptyset$  (d.h.  $\partial M \cap \Phi(T) = \emptyset$ )
2.  $T$  ist offen in  $\mathbb{R}_-^k$  und  $T \cap \partial \mathbb{R}_-^k \neq \emptyset$  (d.h.  $\partial M \cap \Phi(T) \neq \emptyset$ )

Im ersten Fall hat  $\text{supp } \omega$  mit  $\partial M$  keinen Schnitt, also ist in (11.15) das rechte Integral Null. Nach dem Beweis von Satz 11.24 ist auch die linke Seite Null. Im zweiten Fall gilt, da  $\Phi^*\omega$  auf ganz  $\mathbb{R}_-^k$  fortgesetzt wurde:

$$\int_M d\omega = \int_{\Phi(T)} d\omega = \int_T \Phi^*(d\omega)$$

Die äußere Ableitung kann man mit dem Rücktransport vertauschen.

$$= \int_T d(\Phi^*\omega) = \int_{\mathbb{R}_-^k} d(\Phi^*\omega) = \left( \text{Satz 11.24} \right) = \int_{\partial \mathbb{R}_-^k} \Phi^*\omega = \int_{\partial T} \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\partial T)} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

■

Den Stokesschen Satz kann man auch in anderen Varianten dargestellt werden, zum Beispiel: Sei  $M$  kompakt mit Rand und  $\omega$  eine stetig differenzierbare Form auf  $M$ . Dann gilt Formel (11.18).

## Die klassischen Integralsätze

1. Sei  $n = 2$  und  $k = 2$ .

$$\omega = P \cdot dx + Q \cdot dy \quad \Rightarrow \quad d\omega = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy$$

Daraus folgt der Satz von Gauß/Green/Stokes im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\int_M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial M} (P dx + Q dy)$$

2. Sei  $n = 3$  und  $k = 3$ .

$$\omega = P \cdot dy \wedge dz + Q \cdot dz \wedge dx + R \cdot dx \wedge dy \quad \Rightarrow \quad d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

Daraus folgt mit (11.18) der Satz von Gauß im  $\mathbb{R}^3$ .

In der Physik zieht man eine andere Schreibweise vor: Sei  $\vec{v} = (P, Q, R)^T$  und  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$  ( $dS$  ist das übliche skalare Oberflächenelement und  $\vec{n}$  das äußere Normaleneinheitsfeld der Oberfläche).

$$\int_M \operatorname{div} \vec{v} dV = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, d\vec{S} \rangle = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS$$

3. Sei  $n = 3$  und  $k = 2$ .

$$\begin{aligned} \omega &= P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz \\ \Rightarrow d\omega &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx \wedge dy \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (11.18) der Satz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ . In vektorieller Schreibweise lautet dieser:

$$\int_M \langle \operatorname{rot} \vec{v}, d\vec{S} \rangle = \int_M \langle \operatorname{rot} \vec{v}, \vec{n} \rangle dS = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, dx \rangle = \int_{\partial M} \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle ds$$

Hierbei ist  $\vec{t}$  das Tangentialvektorfeld an der Kurve  $\partial M$ .

# 12 Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 12.1 Terminologie und Problemstellungen

Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung sind Funktionen einer Variablen gesucht. Im Gegensatz hierzu stehen die partiellen Differentialgleichungen, die Funktionen mehrerer Variablen beinhalten.

Sei  $F$  eine gegebene Funktion auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ . Für eine Funktion  $x = x(t)$  heißt

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R} \quad (12.1)$$

**gewöhnliche Differentialgleichung**  $n$ -ter Ordnung in **impliziter Form**. Existiert ein  $f$  mit

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (12.2)$$

so spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in **expliziter Form**.

Hat man  $k$  gesuchte Funktionen  $x_1, \dots, x_k$  und dazu (in der Regel)  $n$  Funktionen bzw. Gleichungen der Art (12.1) bzw. (12.2), so spricht man von einem **System gewöhnlicher Differentialgleichungen**.

Eine **Lösung** einer Differentialgleichung ist eine in einem *offenen Intervall*  $I$  definierte, hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion  $x$ , die in diesem Intervall die Differentialgleichung erfüllt. Unter einem **Anfangswertproblem** (AWP) für (12.1) oder (12.2) versteht man folgende Aufgabe: Man bestimme eine Lösung von (12.1) bzw. (12.2), die den folgenden **Anfangsbedingungen** genügt.

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = x_1 \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

Hierbei ist  $t_0 \in I$  ( $I$  heißt **Existenzintervall** der Lösung). Die  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sind  $n$  vorgegebene Zahlen (Anfangswerte). Nach Hadamard spricht man von einem korrekt gestellten Problem, wenn das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat, die stetig von den Anfangswerten abhängt.

## 12.2 Elementare Lösungsmethoden

### 12.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Betrachte  $\dot{x} = f(x) \cdot g(t)$  bzw. (andere Schreibweise)  $a(t) + b(x) \cdot \dot{x} = 0$ . Für  $f(x) \neq 0$  ist

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = g(t)$$

Sind  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $1/f$  und  $g$ , dann ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$F(x) = G(t) + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R},$$

denn wenn man dies nach  $t$  ableitet, erhält man

$$F'(x) \cdot \dot{x} = G'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} \cdot \dot{x} = g$$

Kann man die Gleichung  $F(x) = G(t) + C$  in einem offenen Intervall nach  $x$  auflösen, dann hat man eine (von  $C$  abhängige) Schar von Lösungen der Differentialgleichung gefunden. Die Lösung eines Anfangswertproblems läuft auf die Bestimmung von  $C$  hinaus.

**Beispiel 12.1**  $\dot{x} + t \cdot x^2 = 0$  mit Anfangswertproblem  $x(0) = 2$

$x \equiv 0$  ist eine Lösung der Differentialgleichung, nicht jedoch des Anfangswertproblems. Sei nun  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{x^2} &= t \cdot dt \\ &\downarrow \text{(Stammfunktion)} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}t^2 + C' \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{2}{t^2 + C} \quad \text{mit} \quad C = 2C' \end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem kann nun gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2 = x(0) &= \frac{2}{0+C} \\ C &= 1 \\ x(t) &= \frac{2}{t^2+1} \end{aligned}$$

Ein anderes Anfangswertproblem wäre zum Beispiel  $x(0) = -2$ . Dann ist  $C = -1$  und somit

$$x(t) = \frac{2}{t^2 - 1} \quad \forall t \neq \pm 1$$

Diese Formel liefert im Sinne unserer Lösungsdefinition drei Lösungen der Differentialgleichung, nämlich jeweils in  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  und  $(1, \infty)$ . Allerdings löst (wegen  $t_0 \in I$ ) nur eine dieser Lösungen auch das Anfangswertproblem, nämlich die zweite.

## 12.2.2 Lineare Differentialgleichungen

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist von der Form

$$\dot{x} + f(t) \cdot x = g(t) \quad (12.3)$$

$f$  und  $g$  seien auf einem lokalen Intervall  $I$  definiert und mindestens stetig. Die Funktion  $g$  heißt **inhomogener Anteil**. Verschwindet dieser Anteil, so heißt die Gleichung **homogen**:

$$\dot{x} + f(t) \cdot x = 0 \quad (12.3h)$$

(12.3h) kann man durch Trennung der Variablen lösen: Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

$$\frac{dx}{x} = -f(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \log x = -F(t) + C'$$

Man unterscheide wegen des Logarithmus die Fälle  $x < 0$  und  $x > 0$ . Man erhält schließlich:

$$x(t) = C \cdot e^{-F(t)} = C \cdot e^{-\int f(t)dt} \quad (12.4)$$

$C$  kommt von  $C = e^{C'}$ , das Vorzeichen kann sich aber ändern, um dem Anfangswertproblem zu genügen. Die Lösung  $x = 0$  ist durch  $C = 0$  erfasst.

Die inhomogene Differentialgleichung (12.3) kann nun mittels **Variation der Konstanten** gelöst werden. Der Ansatz gleicht (12.4), jetzt ist aber  $C = C(t)$ .

$$\begin{aligned}x(t) &= C(t) \cdot e^{-F(t)} \\ \dot{x}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-F(t)} - C(t) \cdot \dot{F}(t) \cdot e^{-F(t)} \\ \dot{x}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-F(t)} - C(t) \cdot f(t) \cdot e^{-F(t)}\end{aligned}$$

Beachte (12.3):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\stackrel{!}{=} -f(t) \cdot x(t) + g(t) \\ \Rightarrow \dot{C}(t) \cdot e^{-F(t)} &= g(t) \\ \dot{C}(t) &= g(t) \cdot e^{F(t)} \\ C(t) &= \int g(t) \cdot e^{F(t)} dt + D\end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung von (12.3):

$$x(t) = \left( \int e^{F(t)} \cdot g(t) dt + D \right) \cdot e^{-F(t)} = D \cdot e^{-F(t)} + e^{-F(t)} \int e^{F(t)} \cdot g(t) dt \quad (12.5)$$

**Bemerkung**

Folgerungen

- Man sieht aus (12.5) die Struktur der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}&\text{allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung} \\ &= \text{allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung} \\ &+ \text{spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung}\end{aligned}$$

Die spezielle Lösung lautet  $x_s(t) = e^{-F(t)} \int e^{F(t)} \cdot g(t) dt$ .

- Für beliebige  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  hat das Anfangswertproblem  $x(t_0) = x_0$  die Lösung

$$x(t) = e^{-\hat{F}(t)} \cdot \left[ x_0 + \int_{t_0}^t e^{\hat{F}(\tau)} \cdot g(\tau) d\tau \right] \quad \text{mit} \quad \hat{F}(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

- Zum Superpositionsprinzip: Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden einen Vektorraum. Außerdem: Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung, so ist  $x_1 - x_2$  eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

**Beispiel 12.2**

$$\dot{x} - 2t \cdot x = (2t - 1) \cdot e^t \text{ mit Anfangswertproblem } x(0) = 2$$

Die homogene Differentialgleichung  $\dot{x} - 2t \cdot x = 0$  wird durch  $x(t) = C \cdot e^{t^2}$  gelöst. Für die inhomogene Differentialgleichung verwenden wir deswegen den Ansatz  $x(t) = C(t) \cdot e^{t^2}$ .

$$\begin{aligned} = \dots = \dot{C}(t) &= e^{-t^2} \cdot (2t - 1) \cdot e^t = (2t - 1) \cdot e^{t-t^2} \\ C(t) &= -e^{t-t^2} + D \\ \stackrel{\text{(AWP)}}{\Rightarrow} 2 &= D - 1 \Rightarrow D = 3\end{aligned}$$

**Bemerkung**

zur Trennung der Variablen

$\dot{x}(t) = f(x) \cdot g(t)$  – Existiert ein  $x_1$  mit  $f(x_1) = 0$ , dann ist  $x$  mit  $x(t) = x_1 \forall t$  eine (konstante) Lösung der Differentialgleichung.



# 13 Existenz- und Eindeutigkeitsätze

## 13.1 Vorbereitungen, Banachscher Fixpunktsatz

*Wiederholung:* Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.  $(M, d)$  heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge aus  $M$  einen Grenzwert in  $M$  besitzt. Das heißt: Ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge ( $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ ), dann existiert ein  $x \in M$  mit  $d(x, x_n) \rightarrow 0$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt abgeschlossen, wenn  $M \setminus A$  offen ist. Das heißt: Jeder Häufungspunkt von  $A$  gehört zu  $A$ .

Sei  $B \subset M$ . Eine Abbildung  $T : B \rightarrow B$  heißt **kontrahierend**, wenn es ein  $q \in [0, 1)$  gibt mit

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in B$$

**Theorem 13.1** Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes  $(M, d)$  und  $T : A \rightarrow A$  eine kontrahierende Abbildung. Dann existiert *genau ein* Fixpunkt  $x_0 \in A$  für  $T$ , d.h.  $Tx_0 = x_0$ .

### Beweis

*Eindeutigkeit:* Seien  $x_0 \neq y_0$  zwei Fixpunkte, also ist  $Tx_0 = x_0$  und  $Ty_0 = y_0$ .

$$d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq q \cdot d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = y_0$$

Dies ist ein Widerspruch zu  $x_0 \neq y_0$ .

*Existenz:* Der Beweis erfolgt konstruktiv durch das Verfahren der sukzessiven Approximation. Sei  $x_1 \in A$  ein beliebiger Startpunkt. Bilde nun eine Folge durch  $x_{n+1} := Tx_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir müssen zwei Behauptungen zeigen.

1. Die  $(x_n)$  ist eine Cauchyfolge. Im ersten Schritt betrachten wir benachbarte  $x_n$ .

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) && \leq q \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\ &= q \cdot d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) && \leq q^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ \dots &\leq q^{n-1} \cdot d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt für beliebige  $m, n$  (o.E.d.A.  $m < n$ ):

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \text{(mehrmalige Anwendung der Dreiecksungleichung)} \\ &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \text{(mit obiger Abschätzung)} \\ &\leq (q^{n-2} + \dots + q^{m-1}) \cdot d(x_2, x_1) \\ &= q^{m-1} \cdot \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1})}_{\leq \text{Summe der geometr. Reihe}} \cdot d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

und schließlich

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{q^{m-1}}{1-q} \cdot d(x_2, x_1) \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty \quad (13.1)$$

Also ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge. Da  $M$  vollständig ist, existiert ein  $x_0 \in M$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Da  $x_n \in A$  und  $x_0$  somit ein Häufungspunkt der abgeschlossenen Menge  $A$  ist, folgt  $x_0 \in A$ .

2.  $x_0$  ist ein Fixpunkt. Beachte:  $T$  ist (wie alle kontrahierende Abbildungen) stetig.

$$d(x_n, Tx_0) = d(Tx_{n-1}, Tx_0) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_0) \rightarrow 0$$

Somit ist  $Tx_0$  ein Grenzwert von  $(x_n)$ . Da auch  $x_0$  ein solcher ist und der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, ist  $x_0 = Tx_0$ . ■

### Folgerung 13.2 Fehlerabschätzung

Für den Fehler der Approximation gilt:

$$d(x_m, x_0) \leq \frac{q^{m-1}}{1-q} \cdot d(x_2, x_1)$$

### Definition 13.3

Sei  $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion in den Variablen  $t$  und  $x$ . Man sagt,  $f$  ist in  $G$  bezüglich  $x$  **lipschitzstetig** (oder: genügt bezüglich  $x$  einer **Lipschitzbedingung**), wenn es ein  $L > 0$  gibt mit

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in G$$

Unser Ziel ist ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Anfangswertprobleme.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Die Idee ist, (13.2) in ein äquivalentes Problem umzuwandeln, das für die Anwendung des Fixpunktsatzes gut geeignet ist. Angenommen,  $x$  sei eine Lösung von (12.1) im Intervall  $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ . Für alle  $t \in J$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ \int_{t_0}^t \dot{x}(t) dt &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ x(t) - x_0 &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

Damit ist

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (13.3)$$

## 13.2 Der Satz von Picard-Lindelöf. Weitere Existenzsätze

### Theorem 13.4 Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Betrachte das Anfangswertproblem (13.2). Die Funktion  $f$  sei

1. auf dem Rechteck  $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a \wedge |x - x_0| \leq b\}$  stetig
2. auf  $Q$  durch  $M$  beschränkt, d.h. es ist  $|f(t, x)| \leq M$  für alle  $(t, x) \in Q$ .
3. auf  $Q$  bezüglich  $x$  Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante  $L$ .

Dann existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (13.2). Genauer: Es existiert ein Intervall  $J = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \sigma\}$ , auf dem genau eine Lösung existiert. Man kann wählen:

$$\sigma < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\}$$

#### Bemerkung

Die genaue Abschätzung von  $\sigma$  ist nicht der wesentliche Punkt. Sie ergibt sich sofort aus dem Beweis.

#### Beweis

Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz wie folgt an: Der metrische Raum sei  $C(J)$ , dieser ist mit der Supremumsnorm vollständig.

$$A := \left\{ x \in C(J) : \|x - x_0\| = \sup_{t \in J} |x(t) - x_0| \leq b \right\}$$

Zu der abgeschlossenen Menge  $A$  gehören nur solche stetigen Funktionen, die im Intervall  $J$  noch in  $Q$  verbleiben. Wir betrachten die folgende Abbildung  $T$  (siehe Formel (13.3)):

$$(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad \forall x \in A, t \in J$$

Genau dann, wenn  $x$  eine Lösung von (13.3) ist, ist  $x = Tx$ . Das heißt,  $x$  ist ein Fixpunkt von  $T$  und somit eine Lösung von (13.2). Zu zeigen sind:

1.  $T$  bildet  $A$  in  $A$  ab.

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, x(s))|}_{\leq M} \, ds \leq M \cdot \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \sigma} \leq b \\ \Rightarrow \|Tx - x_0\| &\leq b \end{aligned}$$

2.  $T$  ist kontraktiv: Seien  $x, y \in A$ .

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \cdot |x(s) - y(s)| \, ds \\ &\leq L \cdot \sup_{s \in J} |x(s) - y(s)| \cdot \int_{t_0}^t ds \\ &\leq L \cdot \|x - y\| \cdot |t - t_0| \leq q \cdot \|x - y\| \\ \Rightarrow \|Tx - Ty\| &\leq q \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Wegen  $\sigma < 1/L$  ist  $0 < q = L \cdot \sigma < 1$ .

Damit ist der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar. Folglich besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt und somit (13.2) genau eine Lösung. Die Lösung könnte man (wie beim Beweis des Fixpunktsatzes) durch sukzessive Approximation finden. ■

Wir formulieren den Satz von Picard-Lindelöf auch für Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme  $n$ -ter Ordnung.

1. Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit Anfangswertproblem

$$\left. \begin{array}{l} x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \\ x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ gegeben} \end{array} \right\} \quad (13.4)$$

2. Systeme von Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit Anfangswertproblem: Sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  und  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ . Die Ableitungen heißen  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)})$ .

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \dots \quad \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \in \mathbb{R}^k \text{ gegeben} \end{array} \right\} \quad (13.5)$$

3. Systeme *erster* Ordnung mit Anfangswertproblem

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k \end{array} \right\} \quad (13.6)$$

4. lineare Systeme erster Ordnung

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \text{mit } \mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{k \times k} \end{array} \right\} \quad (13.7)$$

Für  $\mathbf{b}(t) = 0$  heißt das lineare System **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Wenn  $\mathbf{A}$  nicht von  $t$  abhängt, ist (13.7) ein lineares System mit **konstanten Koeffizienten**.

Eine explizit gegebene Differentialgleichung bzw. Differentialgleichungssystem heißt **autonom**, wenn die rechte Seite nicht explizit von  $t$  abhängt.

5. Grob gesprochen benötigt man nur eine Theorie für Systeme erster Ordnung. (13.4) ist äquivalent zu folgendem System erster Ordnung:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (13.8)$$

Man hat also gesetzt:  $x_1 := x$ ,  $x_2 := \dot{x}$  bis  $x_n := x^{(n-1)}$ . Wie transformieren sich die Anfangswerte? Sei  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  eine Lösung des Systems mit den Anfangswerten

$$\mathbf{y}(t_0) = (y_1^0, \dots, y_n^0) = \mathbf{y}^0$$

Beachtet man, wie man (13.8) aus (13.4) und umgekehrt erhält, so ist  $\mathbf{y}(t)$  von folgender Gestalt:

$$\mathbf{y}(t) = (x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

Hierbei ist  $x(t)$  eine Lösung von (13.4) mit den Anfangswerten  $x(t_0) = y_1^0$  bis  $x^{(n-1)}(t_0) = y_n^0$ .

Analog verwandelt man Systeme und Anfangswertprobleme  $n$ -ter Ordnung in Systeme bzw. Anfangswertprobleme erster Ordnung. Wir benötigen nun den Satz von Picard-Lindelöf in einer geeigneten Formulierung für Systeme erster Ordnung. Zur Formulierung bedarf es einer Lipschitzbedingung in „Vektorform“.

### Definition 13.5

Sei  $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben (Schreibweise:  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ).  $\mathbf{f}$  genügt in  $G$  bzgl.  $\mathbf{x}$  einer **Lipschitzbedingung** mit der **Lipschitzkonstante**  $L > 0$ , wenn gilt:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in G$$

#### Bemerkung

Auf beiden Seiten ist  $\|\cdot\|$  eine Norm im  $\mathbb{R}^n$ . Es kann günstig sein, die euklidische Norm nicht zu wählen.

### Theorem 13.6

Das Anfangswertproblem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  hat eine eindeutige lokale Lösung, wenn  $\mathbf{f}$

1. auf  $Q = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leq b\}$  stetig und somit beschränkt ist
2. in  $Q$  bezüglich  $\mathbf{x}$  einer Lipschitzbedingung genügt

#### Bemerkung

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f$  stetig und bezüglich  $\mathbf{x}$  lipschitzstetig. Dann kann man  $Q$  in  $G$  beliebig wählen.

Bei der Betrachtung von Anfangswertproblemen wie (13.2) gilt: Je bessere Eigenschaften die rechte Seite, also die Funktion  $f$ , ist, desto bessere Eigenschaften hat auch die Lösung.

### Theorem 13.7

Betrachte das Anfangswertproblem (13.2).

1. *Existenzsatz von Peano*: Wenn  $f$  auf einem Rechteck um  $(t_0, x_0)$  stetig ist, existiert eine Lösung von (13.2). (Die Eindeutigkeit ist nicht garantiert.)
2. *Existenzsatz von Cauchy*: Sei  $f$  in einer Umgebung von  $(t_0, x_0)$  analytisch, d.h. in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$f(t, x) = \sum_{k,l} b_{kl} \cdot (t - t_0)^k \cdot (x - x_0)^l$$

Dann existiert in einer Umgebung von  $t_0$  genau eine analytische Lösung von (13.2), also

$$x(t) = \sum_n a_n \cdot (t - t_0)^n$$

## 13.3 Fortsetzung von Lösungen

Der Nachteil der Betrachtung lokaler Lösungen ist, dass das Existenzintervall sehr klein sein kann. Die Lösung dieses Problems ist die Fortsetzung von Lösungen.

**Definition 13.8**

1. Sei  $x$  auf  $(c, d)$  eine Lösung des Anfangswertproblems (13.2). Wenn es ein Intervall  $(c', d') \supset (c, d)$  gibt und  $y$  eine Lösung von (13.2) ist, die auf  $(c', d')$  definiert ist und für die  $x(t) = y(t)$  für alle  $t \in (c, d)$  ist, dann heißt  $y$  **Fortsetzung** von  $x$ .
2. Eine Lösung heißt **maximal**, wenn sie keine Fortsetzung besitzt.

**Lemma 13.9** Eindeutigkeit der Fortsetzung

Betrachte ein Rechteck  $Q$  und das Anfangswertproblem (13.2). Jedes Anfangswertproblem sei in  $Q$  eindeutig lösbar. Sei  $x$  eine Lösung des Anfangswertproblems (13.2) für  $(t_0, x_0) \in (c, d) \subset Q$ . Seien  $y_1$  und  $y_2$  zwei Fortsetzungen von  $x$  auf  $(c', d') \supset (c, d)$ . Dann gilt  $y_1(t) = y_2(t)$  für alle  $t \in (c', d')$ , d.h. wenn überhaupt Fortsetzungen existieren, dann eindeutige.

**Beweis**

Sei  $M = \{t \in [t_0, d'] : y_1(t) \neq y_2(t)\}$ . Diese Menge sei nichtleer (sonst sind wir schon fertig). Setze  $t_1 := \inf M$ . Natürlich gilt  $d \leq t_1$ . Für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$  ist  $y_1(t) = y_2(t)$ . Da  $y_1$  und  $y_2$  stetig sind, muss auch  $y_1(t_1) = y_2(t_1) =: B$  gelten.

Betrachte nun das Anfangswertproblem  $\dot{x} = f(t, x)$  und  $x(t_1) = B$ . Da dieses Problem eindeutig lösbar ist, existiert in einer Umgebung von  $t_1$  genau eine Lösung. Also gilt  $y_1(t) = y_2(t)$  in einer Umgebung von  $t_1$ . Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $t_1$ , weswegen die Menge  $M$  leer sein muss.

Analog argumentiert man bei linksseitigen Fortsetzungen. ■

**Satz 13.10**

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet. In  $G$  möge  $f$  den Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf genügen (d.h. um jeden Punkt in  $G$  existiert ein Rechteck in  $G$ , in dem  $f$  die Voraussetzungen erfüllt). Dann gilt:

1. Es existiert genau eine maximale Lösung  $x_{\max}$  von (13.2).
2. Für  $x_{\max}$ , definiert auf  $(c, d)$  ist die Fortsetzung stets bis zum Rand möglich:

$$\begin{aligned} (c, u) \in \partial G & \quad \text{mit} \quad u := \lim_{t \rightarrow c+0} x_{\max}(t) \\ (d, v) \in \partial G & \quad \text{mit} \quad v := \lim_{t \rightarrow d-0} x_{\max}(t) \end{aligned}$$

**Satz 13.11**

Sei  $I = (a, b)$  und  $S = I \times \mathbb{R}$  ein Streifen.  $f$  sei auf  $S$  stetig und für jedes Intervall  $(a', b') \subset (a, b)$  existiere eine Lipschitzkonstante  $L'$  mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L' \cdot |x - y| \quad \forall t \in I' \text{ und } x, y \in \mathbb{R}$$

Seien nun  $x$  und  $\hat{x}$  Lösungen der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x)$  zu den jeweiligen Anfangswerten  $x(t_0) = x_0$  und  $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ . Dann gilt für alle  $t \in I'$ :

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq |x_0 - \hat{x}_0| \cdot e^{L' \cdot |t - t_0|}$$

# 14 Lineare Systeme erster Ordnung

## 14.1 Das allgemeine lineare System erster Ordnung

Wir betrachten in diesem Abschnitt folgendes System:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot x_j(t) + b_i(t) \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq n \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Das entsprechende Anfangswertproblem heiße  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  mit  $t \in I := (a, b)$ . Die  $a_{ij}$  und  $b_i$  seien aus  $C(I)$ . Wir lassen auch komplexwertige Funktionen zu: Geht man dann zu Real- und Imaginärteil über, erhält man ein „reelles“ System doppelter Größe. Das zugehörige homogene System ergibt sich für  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (14.1h)$$

Im Satz von Picard-Lindelöf wäre also  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ . Die Voraussetzungen des Satzes sind für  $t_0$  erfüllt, weil die rechte Seite stetig und bezüglich  $\mathbf{x}$  lipschitzstetig ist:

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| = \|\mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{A}(t)\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}(t)\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Da die Menge der Lösungen von (14.1h) einen Vektorraum bildet (dies folgt sofort aus dem Superpositionsprinzip), wollen wir Aussagen über die Dimension und die Basen des Lösungsraumes treffen. Allerdings existiert kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von Lösungen von (14.1h) und (14.1).

Für Operationen mit dem Lösungsraum benötigen wir den folgenden Begriff:

### Definition 14.1

Die Vektorfunktionen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen im Intervall  $I$  **linear unabhängig**, wenn

$$c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \dots + c_m \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{0}$$

nur dann in  $I$  gelten kann, wenn  $c_1 = \dots = c_m = 0$  ist. Sonst heißen die  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  **linear abhängig**.

#### Bemerkung

Hierbei ist  $\mathbf{0}$  ein Vektor, dessen Komponenten alle verschwinden. Die Gleichung muss für alle  $t \in I$  gelten.

### Beispiel 14.1

Für  $n = 1$  betrachte  $y_1(t) = t$ ,  $y_2(t) = t^2$  bis  $y_m(t) = t^m$ . Die  $y_i$  sind in jedem beliebigen Intervall linear unabhängig.

$$c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + \dots + c_m \cdot t^m = 0$$

Auf der linken Seite steht ein Polynom, welches (höchstens)  $m$  Nullstellen hat. Die Gleichung soll aber auf dem gesamten Intervall (also in überabzählbar vielen Punkten) verschwinden, weshalb es sich um das Nullpolynom handeln muss.

Seien  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  Lösungen von (14.1h). Dann heißt  $X(t) := (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$  **Lösungsmatrix** und  $W(t) := \det X(t)$  ist die zugehörige **Wronski-Determinante**.

### Satz 14.2

Der Lösungsraum  $L$  des Systems (14.1h) ist  $n$ -dimensional.

#### Beweis

durch Anwendung des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes

Seien  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  die Standard-Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$  fest und  $\mathbf{x}_i$  für  $i = 1, \dots, n$  die Lösungen des Anfangswertproblems (14.1h) und  $\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{e}_i$ . Zu zeigen ist:

1. Die  $\mathbf{x}_i$  sind in  $I$  linear unabhängig.

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n &= \mathbf{0} \\ \text{Insbesondere: } c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_0) &= \mathbf{0} \\ c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{e}_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

2. Jede beliebige Lösung  $\mathbf{x}$  von (14.1h) lässt sich als Linearkombination der  $\mathbf{x}_i$  darstellen: Wir setzen  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T := \mathbf{x}(t_0)$ . Betrachte nun die folgende Lösung von (14.1h):

$$\mathbf{y} = a_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{x}_n$$

Insbesondere ist  $\mathbf{y}(t_0) = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{x}(t_0)$ . Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt damit  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ .

■

Jede Basis des Lösungsraumes von (14.1h) heißt **Fundamentalsystem** von Lösungen. Die zugehörige Lösungsmatrix heißt **Fundamentalmatrix**.

### Satz 14.3

Seien  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  Lösungen von (14.1h) im Lösungsintervall  $I$ . Dann sind äquivalent:

1. Die  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  bilden ein Fundamentalsystem.
2. Die Wronski-Determinante verschwindet in  $I$  nie, d.h. für alle  $t \in I$  ist  $W(t) \neq 0$ .
3.  $W(t)$  verschwindet an einem Punkt in  $I$  nicht, d.h. es existiert ein  $t_0 \in I$  mit  $W(t_0) \neq 0$ .

#### Beweis

Aus 1. folgt 2.: Sei  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  ein Fundamentalsystem für (14.1h). Es sei  $W(t_1) = 0$  für ein  $t_1 \in I$ . Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_1) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_1) = \mathbf{0} \quad (*)$$

für die Unbekannten  $c_1, \dots, c_n$ . Da  $W(t_1)$ , die Determinante der Koeffizientenmatrix von (\*), verschwindet, existiert eine nichttriviale Lösung  $c'_1, \dots, c'_n$  von (\*). Dann ist  $\mathbf{y} = c'_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c'_n \cdot \mathbf{x}_n$  eine Lösung mit dem Anfangswert  $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{0}$ . Da natürlich auch  $\mathbf{0}$ , der Vektor aus  $n$  Funktionen identisch Null, eine Lösung von (14.1h) mit dem Anfangswert  $\mathbf{0}(t_1) = \mathbf{0}$  ist, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Das würde bedeuten, dass die  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  linear abhängig sind. Das ist ein Widerspruch, folglich muss  $W(t_1) \neq 0$  sein.

Aus 2. folgt 3.: Das ist trivial. (Wenn etwas für alle  $t \in I$  gilt, dann auch für ein bestimmtes dieser  $t$ .)



Aus 3. folgt 1.: Sei  $\mathbf{x}$  eine beliebige Lösung von (14.1h). Wir zeigen:  $\mathbf{x}$  ist eine Linearkombination der  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Da  $W(t_0) \neq 0$  ist, hat das lineare Gleichungssystem

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \neq 0$$

eine nichttriviale Lösung. Betrachte

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n - \mathbf{x}$$

$\mathbf{y}$  ist eine Lösung von (14.1h) mit dem Anfangswert

$$\mathbf{y}(t_0) = \underbrace{c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n(t_0)}_{=\mathbf{x}(t_0)} - \mathbf{x}(t_0) = 0$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems ist  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  und somit

$$\mathbf{x} = c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{x}_n$$

■

#### Bemerkung

1. Das im Satz angegebene Kriterium für die lineare Unabhängigkeit der  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  gilt nur, wenn die  $\mathbf{x}_i$  die Lösung eines homogenen Systemes  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$  sind.
2. Ist  $\mathbf{X}(t)$  eine Fundamentalmatrix, dann ist offenbar  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}$  für ein beliebiges  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  die allgemeine Lösung von (14.1h). Die Lösung des Anfangswertproblems  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  ist

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$$

3. Es existiert kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von  $\mathbf{X}(t)$ .

#### Folgerung 14.4

1. Sei  $\mathbf{X}(t)$  eine Lösungsmatrix von (14.1h). Dann gilt:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$$

2. Sei  $\mathbf{X}(t)$  eine aus differenzierbaren Vektorfunktionen  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  gebildete Matrix. Wenn für alle  $t \in I$  gilt, dass die obige Formel erfüllt ist und  $\mathbf{X}(t)$  nicht singular ist, d.h.  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ , dann ist  $\mathbf{X}(t)$  eine Fundamentalmatrix von (14.1h).

Zur Lösung des inhomogenen Systems (14.1) kann man wieder das Verfahren der Variation der Konstanten anwenden. Sei  $\mathbf{X}(t)$  eine Fundamentalmatrix zu (14.1h). Der Ansatz ist also

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &\stackrel{!}{=} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \end{aligned}$$

Man erkennt durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) &= \mathbf{b}(t) \\ \dot{\mathbf{c}}(t) &= \mathbf{X}(t)^{-1} \cdot \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{c}(t) &= \int \mathbf{X}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{X}(t) \cdot \int \mathbf{X}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds \end{aligned}$$

Sucht man eine Lösung des Anfangswertproblems  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$  zu (14.1), so folgt:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \int_{t_0}^t \mathbf{X}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds + \mathbf{y}^0$$

## Einordnung linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung in diese Betrachtungen

$$x^{(n)} + a_n(t) \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \cdot x = \begin{cases} f(t) & (14.2) \\ 0 & (14.2h) \end{cases}$$

Das zugehörige Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung ist  $x(t_0) = x_1^0$  bis  $x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$ . Gemäß Formel (13.8) lässt sich dieses System mit  $x_1 := x$  umwandeln in

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -[a_n \cdot x_n + \dots + a_1 \cdot x_1] + f(t) \end{aligned} \right\} (14.3)$$

Das Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, wenn die  $a_i$  und  $f$  im betrachteten Intervall stetig sind. Die Lösung von (14.2h) und des Systems (14.3) hängen wie folgt zusammen: Ist  $x$  eine Lösung von (14.2h), dann ist  $\mathbf{x} := (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T$  eine Lösung von (14.3).

Die Wronski-Determinante kann nun auch für (14.2h) betrachtet werden: Seien  $y_1, \dots, y_n$  Lösungen von (14.2h).

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dots & \dot{y}_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

## 14.2 Die Matrixexponentialfunktion

*Motivation:* Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = a \cdot x \quad \text{mit} \quad x(0) = x^0$$

ist  $x(t) = e^{at} \cdot x^0$ . Betrachte nun

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

Hierbei ist  $A \in M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n \times n}$ . Es wäre schön, wenn man als Lösung angeben könnte:  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}^0$ . Was ist  $e^{\mathbf{A}t}$ ? Eventuell ist

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \cdot t^k$$

Die Konvergenz dieser unendlichen Reihe ist gleichbedeutend damit, dass die Folge der zugehörigen Partialsummen  $s_n(t)$  in  $M_n(\mathbb{C})$  konvergiert. Wir betrachten die Konvergenz in  $M_n(\mathbb{C})$  nicht komponentenweise, sondern geschickter bezüglich einer passenden Norm. „Passend“ ist in diesem Fall jede Norm mit der folgenden Eigenschaft:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

Daraus folgt durch Induktion:

$$\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k$$

Eine solche Norm ist zum Beispiel

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

Da  $M_n(\mathbb{C})$  ein  $n^2$ -dimensionaler Vektorraum ist, sind darin alle Normen äquivalent, d.h. wenn  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen sind, existieren  $c, d > 0$  mit

$$c \|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq d \|\mathbf{A}\|_1 \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

Die Konvergenz einer Folge bezüglich  $\|\cdot\|_1$  ist daher äquivalent zur Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .

### Definition und Satz 14.5

Für jedes  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$  wird gesetzt:

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$$

Diese Reihe konvergiert bezüglich der folgenden Norm in  $M_n(\mathbb{C})$ :

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

Die Abbildung  $\mathbf{A} \mapsto e^{\mathbf{A}}$  heißt **Matrixexponentialfunktion**.

### Beweis

Sei  $(S_n)$  die entsprechende Folge der Partialsummen, also

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

Wir zeigen, dass  $(S_n)$  bezüglich  $\|\cdot\|$  eine Cauchyfolge ist (o.E.d.A. sei  $n > m$ ).

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \left\| \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} \rightarrow 0$$

für  $m, n \rightarrow \infty$ , weil die Reihe für  $e^{\|\mathbf{A}\|}$  natürlich konvergiert. Da  $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$  ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, sind alle Normen in  $M_n(\mathbb{C})$  äquivalent und der Raum  $M_n(\mathbb{C})$  vollständig, konvergiert  $(S_n)$ . Der Limes wird mit  $e^{\mathbf{A}}$  bezeichnet. Damit ist natürlich auch  $e^{\mathbf{A}t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  erklärt. ■

### Bemerkung

Sei  $A$  eine Algebra (d.h. ein Vektorraum, in dem die Multiplikation erklärt ist) und gleichzeitig ein vollständig normierter Raum bezüglich einer Norm  $\|\cdot\|$ , für die  $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$  für alle  $a, b \in A$  gilt. Dann heißt  $A$  **Banachalgebra**. In  $A$  ist dann ebenfalls die Matrixexponentialfunktion wohldefiniert.

**Satz 14.6** Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion

1. Ist  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ , dann ist  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ .
2.  $e^{\mathbf{A}}$  ist stets invertierbar und es gilt:  $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ .
3. Für  $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}$  ist  $e^{\mathbf{C}} = \mathbf{B} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ .
4.  $\mathbf{B}$  habe Blockgestalt:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{B}_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\mathbf{B}_k} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die  $\mathbf{B}_i$  quadratische Matrizen (Spezialfall: Zahlen, d.h.  $\mathbf{B}$  ist eine Diagonalmatrix).

5.  $\|e^{\mathbf{B}}\| \leq e^{\|\mathbf{B}\|}$
6.  $\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}$

**Beweis**

1. Da die Reihe für  $e^{\mathbf{A}}$  und  $e^{\mathbf{B}}$  bezüglich  $\|\cdot\|$  sogar absolut konvergiert, kann man die Cauchysche Produktreihe zur Bestimmung von  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$  bilden. Da  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  kommutieren, kann man  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n$  mit dem binomischen Satz ausrechnen. (Kommutieren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  nicht, wäre zum Beispiel  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$ .) Beachte  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ .

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \mathbf{A}^{n-k} \cdot \mathbf{B}^k \\ \frac{1}{n!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^n &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\mathbf{A}^{n-k}}{(n-k)!} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

Rechts steht das  $n$ -te Glied der Cauchyschen Produktreihe für  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ . Summiert man von  $n = 0$  bis  $\infty$ , so erhält man  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ .

2. Aus 1. folgt  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{E}$  und analog  $e^{-\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$ , also ist  $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ .
3. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^n &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ e^{\mathbf{C}} &= \sum_n \frac{\mathbf{C}^n}{n!} = \sum_n \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{B}^{-1}}{n!} = \mathbf{B} \cdot \sum_n \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

4. Folgt sofort aus

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_k^n \end{pmatrix}$$

- 5.

$$\|e^{\mathbf{A}}\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| = \left( \begin{array}{c} \text{Stetigkeit} \\ \text{der Norm} \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} = e^{\|\mathbf{A}\|}$$

6. Benutze die Definition der Ableitung und der Matrixexponentialfunktion.

$$\frac{e^{\mathbf{A}(t+h)} - e^{\mathbf{A}t}}{h} = \frac{e^{\mathbf{A}t}}{h} \cdot (e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{E}) = \frac{e^{\mathbf{A}t}}{h} \cdot \left( \mathbf{E} + \mathbf{A}h + \frac{\mathbf{A}^2 h^2}{2!} + \dots - \mathbf{E} \right) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \left( \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2 h}{2!} + \dots \right)$$

Für  $h \rightarrow 0$  verschwinden alle bis auf den ersten Summanden, es verbleibt als Ableitung  $\mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}$ . ■

Bemerkung

$t \mapsto e^{\mathbf{A}t}$  bildet  $\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  ab. Also ist  $(e^{\mathbf{A}t})_{t \in \mathbb{R}}$  eine einparametrische Gruppe von Matrizen. Das heißt:  $e^{\mathbf{A}s} \cdot e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(s+t)}$ ,  $e^{\mathbf{A} \cdot 0} = \mathbf{E}$  (neutrales Element),  $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{\mathbf{A}(-t)}$ .

Es gelingt nur in einfachen Fällen, die Reihe für  $e^{\mathbf{A}}$  tatsächlich zu summieren. Deshalb gibt es verschiedene Bestimmungsalgorithmen. Wir benutzen die Idee aus Satz 14.6.3: Sei  $\mathbf{A}$  gegeben. Angenommen, es existiert ein  $\mathbf{B}$ , für das  $\mathbf{C} := \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$  eine einfache Gestalt hat, sodass  $e^{\mathbf{C}}$  leicht bestimmbar ist.

$$e^{\mathbf{C}} = \mathbf{B} \cdot e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1} \cdot e^{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}$$

*Spezialfall:*  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$  – Dann ist  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar, d.h. es existiert eine unitäre Matrix  $\mathbf{U}$  ( $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$ ), sodass  $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$  Diagonalgestalt hat.

Allgemein kann man den folgenden Satz aus der linearen Algebra benutzen: Zu jeder Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  existiert eine invertierbare Matrix  $\mathbf{U}$ , sodass  $\mathbf{B} := \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$  die folgende Blockgestalt hat:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\mathbf{J}_k} \end{pmatrix}$$

Die  $\mathbf{J}_i$  heißen **Jordankästchen**.  $\lambda$  ist einer der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ . In verschiedenen Kästchen können gleiche Eigenwerte stehen. Diese Darstellung von  $\mathbf{A}$  heißt **Jordansche Normalform**. Die Jordankästchen kann man als  $\mathbf{J} = \lambda \cdot \mathbf{E} + \mathbf{N}$  darstellen, wobei

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist.  $\mathbf{N}$  ist eine sogenannte **nilpotente Matrix**, d.h. es gibt ein  $r > 0$ , sodass  $\mathbf{N}^s = \mathbf{0}$  für alle  $s > r$  gilt. Multipliziert man  $\mathbf{N}$  mit sich selbst, so rücken die Einsen bei jeder Multiplikation eine Nebendiagonale nach oben, bis man  $\mathbf{0}$  erhält. Im obigen Fall ist  $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$ , deshalb bricht die Reihe in  $e^{\mathbf{N}}$  nach dem  $k$ -ten Glied ab.

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{\lambda \mathbf{I}t} \cdot e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

Damit hat man  $e^{\mathbf{B}t}$  im Prinzip strukturell bestimmt.

## 14.3 Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### Satz 14.7

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (14.5)$$

sei ein Differentialgleichungssystem mit  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ . Dann ist für ein beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  die Matrix  $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  eine Fundamentalmatrix für (14.5).

### Beweis

Wir wenden die Folgerung 14.4.2 an:  $\mathbf{X}(t)$  ist natürlich invertierbar und außerdem ist

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (e^{\mathbf{A}t})' = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$$

Um dies zu vereinfachen, wird zunächst für die Lösung von (14.5) ein Spezialfall behandelt.

### Satz 14.8

1. Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{c}$  ein zugehöriger Eigenvektor, dann ist  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}$  eine Lösung von (14.5).
2. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ , dann ist

$$\mathbf{X}(t) = (e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{c}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \cdot \mathbf{c}_n)$$

eine Fundamentalmatrix für (14.5).

### Beweis

1.  $\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda \cdot \mathbf{c} = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$

### Bemerkung

Im Allgemeinen ist  $\mathbf{X}(t) \neq e^{\mathbf{A}t}$ .

Sei  $\mathbf{A}$  gegeben und  $\mathbf{B} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1}$  die zugehörige Jordansche Normalform. Dann gilt:  $\mathbf{x}$  ist eine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  genau dann, wenn  $\mathbf{y} := \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}$  eine Lösung von  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$  ist, denn:

$$\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Eine typische Lösung  $\mathbf{y}$  von  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{y}$  hat die Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}, \dots, t, 1, 0, \dots, 0 \right)^T$$

Für ein Jordankästchen  $J_i \in M_i(\mathbb{R})$  gilt  $0 \leq l \leq r-1$ . Maximal läuft  $l$  von 0 bis zu einem Vielfachen von  $\lambda-1$ . Betrachte nun  $\mathbf{x} := \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{y}$ . Die Elemente von  $\mathbf{x}$  sind also Linearkombinationen der Elemente von  $\mathbf{y}$ , also

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t} \cdot (P_1(t), \dots, P_n(t))$$

Dabei sind die  $P_i$  Polynome vom Grade  $\leq l-1$ . Der folgende Satz fasst alles zusammen.

**Satz 14.9** Struktur der Lösungen von (14.5)

1. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den algebraischen Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_k$  (den Vielfachheiten der  $\lambda_i$  als Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $\mathbf{A}$ ). Dann hat die allgemeine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  die Form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t) \quad (14.6)$$

Hierbei sind die  $\mathbf{P}_j$  Vektoren aus Polynomen von  $t$  vom Grade  $\leq n_j - 1$ .

2. Reelle Form der allgemeinen Lösungen: Seien  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_m$  und  $(\lambda_{m+1}, \bar{\lambda}_{m+1}), \dots, (\lambda_{m+s}, \bar{\lambda}_{m+s})$  die paarweise konjugiert komplexen Eigenwerte mit den Vielfachheiten  $n_{m+1}, \dots, n_{m+s}$ . Die komplexen Werte seien als  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  darstellbar. Dann hat die allgemeine Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  die Form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j(t) \cdot e^{\lambda_j t} + \sum_{j=m+1}^{m+s} [\mathbf{Q}_j(t) \cdot \cos(\beta_j t) + \mathbf{R}_j(t) \cdot \sin(\beta_j t)] \cdot e^{\alpha_j t} \quad (14.7)$$

Hierbei sind die  $\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_j, \mathbf{R}_j$  Vektoren aus Polynomen von  $t$  vom Grade  $\leq n_j - 1$ .

Man kann die Formeln (14.6) und (14.7) als Ansatz benutzen, um die Koeffizienten der Polynome in  $\mathbf{P}_j, \mathbf{Q}_j, \mathbf{R}_j$  zu bestimmen. Bei der allgemeinen Lösung müssen  $n$  Koeffizienten frei bleiben; erst durch ein Anfangswertproblem sind alle Koeffizienten bestimmt.

**Beispiele**

1.  $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$  und  $\dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2$  mit dem Anfangswertproblem  $\mathbf{x}(0) = (0, 5)^T$

Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte  $-3$  und  $2$ . Der Lösungsansatz ist somit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cdot e^{-3t} + C \cdot e^{2t} & \dot{x}_1(t) &= -3A \cdot e^{-3t} + 2C \cdot e^{2t} \\ x_2(t) &= B \cdot e^{-3t} + D \cdot e^{2t} & \dot{x}_2(t) &= -3B \cdot e^{-3t} + 2D \cdot e^{2t} \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichungen ein. Da  $e^{-3t}$  und  $e^{2t}$  linear unabhängige Funktionen sind, kann man einen Koeffizientenvergleich machen und erhält die voneinander unabhängigen linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} -3A &= A + B & 2C &= C + D \\ -3B &= 4A - 2B & 2D &= 4C - 2D \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $B = -4A$  und  $C = D$ , sodass die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist  $(1, -4)^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-3$  und  $(1, 1)^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $2$ . Das Anfangswertproblem kann nun gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Als Lösung für das Anfangswertproblem haben wir also gefunden:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

2.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  mit  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$  Es ist beim Auftreten mehrerer Eigenwerte häufig günstig,

für jeden Eigenwert den zugehörigen Ansatz separat zu behandeln, denn die Koeffizienten der Polynome verschiedener Eigenwerte sind wie oben gesehen voneinander unabhängig.

Für  $\lambda_1 = 0$  mit der Vielfachheit  $n_1 = 1$  lautet der Ansatz wegen  $e^{\lambda_1 t} = 1$ :

$$\mathbf{x} = (a, b, c)^T \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Einsetzen in das Differentialgleichungssystem liefert

$$\left. \begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -b + 4c = 0 \\ a - 4c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a \\ c = \frac{a}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{x} = a \cdot \left( 1, 1, \frac{1}{4} \right)^T$$

Für  $\lambda_2 = -3$  mit der Vielfachheit  $n_2 = 2$  machen wir den Ansatz

$$\mathbf{x} = e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot t \\ b_0 + b_1 \cdot t \\ c_0 + c_1 \cdot t \end{pmatrix}$$

Diesen Ansatz setzen wir in das Gleichungssystem ein, machen einen Koeffizientenvergleich und lösen die entstehenden linearen Gleichungssysteme. Dabei verbleiben zwei Parameter  $b$  und  $c$  mit

$$\mathbf{x} = e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} c + b \cdot t \\ b - 2c - 2b \cdot t \\ c - b + b \cdot t \end{pmatrix}$$

Als Gesamtlösung folgt daraus

$$\mathbf{x}(t) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + b \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{-3t} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

Hierbei ist

- der erste Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$
- der letzte Vektor ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = -3$
- der zweite Vektor ein **Hauptvektor** zum Eigenwert  $\lambda_2 = -3$

Es gilt: Eigenvektor =  $(\mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{E}) \cdot$  Hauptvektor

## 14.4 Bemerkungen zur Stabilität von Lösungen

Wir wollen uns mit den Anfangsgründen der sogenannten qualitativen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und insbesondere nichtlinearer Systeme befassen. Dazu betrachten wir **autonome** (d.h. nicht zeitabhängige) Systeme der folgenden Art:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \quad (14.8)$$



Hierbei ist  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Nach Picard-Lindelöf haben alle Anfangswertprobleme eine lokale Lösung. Wir nehmen einmal an, dass jedes Anfangswertproblem eine *globale* Lösung für alle  $t \in \mathbb{R}$  hat. Diese Lösung bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$  bzw.  $\mathbf{x}(\cdot, \mathbf{x}^0)$ .

Wir interessieren uns jetzt weniger für die Abhängigkeit der Lösung von  $t$ , als viel mehr von  $\mathbf{x}^0$ . Für festes  $t \in \mathbb{R}$  entsteht dann eine Abbildung  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi_t(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ . Also haben wir eine einparametrische Familie  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  von Abbildungen. Diese Familie hat die folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{und} \quad \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Also ist  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  auch eine Gruppe. Der  $\mathbb{R}^n$  heißt **Phasenraum**,  $(\varphi_t)$  ist der **Fluss**. Man veranschaulicht sich die Lösungen von (14.8) häufig als die Kurven im Phasenraum, die als Lösungen auftreten können. Diese heißen **Trajektorien** oder **Orbits**. Die Gesamtheit aller Trajektorien heißt **Phasenportrait** des Systems. Wir interessieren uns jetzt für das Langzeitverhalten von Lösungen.

### Definition 14.10

Sei  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Betrachte

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (14.9)$$

1. Eine Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  von (14.9) heißt auf  $[0, \infty)$  **stabil** (im Sinne von Liapunov), wenn es zu jedem  $F > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass jede Lösung  $\mathbf{x}$  von (14.9) mit  $\|\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)\| < \delta$  auf ganz  $[0, \infty)$  existiert und für alle  $t \geq 0$  gilt:  $\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| \leq F$
2. Eine Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  von (14.9) heißt **asymptotisch stabil**, wenn  $\hat{\mathbf{x}}$  stabil ist und für jede Lösung  $\mathbf{x}$  (wie im ersten Teil) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$$

3. Eine Lösung, die nicht stabil ist, heißt **instabil**.

#### Bemerkung

1. Die Wahl der Norm in  $\mathbb{R}^n$  ist hierbei beliebig.
2. Die Definitionen besagen, dass die betrachteten Lösungen für alle  $t \geq 0$  (allgemeiner: für  $t \geq t_0$ ) existieren sollen.
3. Es gibt Systeme von Differentialgleichungen, die instabile Lösungen  $\hat{\mathbf{x}}$  haben, für die aber die Bedingung aus 14.10.2 trotzdem gilt.

Im Folgenden interessiert uns die Stabilität von **Gleichgewichtslösungen** von (14.9), d.h. Lösungen  $\mathbf{x} = \mathbf{a} = \text{const.}$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . Dieses  $\mathbf{a}$  heißt Gleichgewichtslage, statischer oder kritischer Punkt. Zunächst betrachten wir Systeme mit konstanten Koeffizienten. Solch ein System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  hat das Gleichgewicht  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

### Satz 14.11

Die Art des Gleichgewichtes  $\mathbf{0}$  von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  ist durch die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  der Matrix  $\mathbf{A}$  wie folgt bestimmt:

1. Ist  $\text{Re } \lambda_k < 0$  für alle  $k$ , so ist  $\mathbf{0}$  asymptotisch stabil.
2. Gibt es ein  $k$  mit  $\text{Re } \lambda_k > 0$ , so ist  $\mathbf{0}$  instabil.
3. Im Falle  $\max_k \text{Re } \lambda_k = 0$  gilt:  $\mathbf{0}$  ist genau dann stabil, wenn für jedes  $k$  mit  $\text{Re } \lambda_k = 0$  die algebraische und die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_k$  übereinstimmen.

**Beweis**

Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$  ein Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit  $r$ , d.h.  $\lambda$  ist eine  $r$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $A$ . Dann ist die zugehörige Lösung von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  aus dem Fundamentalsystem die Form

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \cdot (\mathbf{P}(t) \cdot \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \cdot \sin \beta t)$$

Hierbei sind  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  Polynome vom Grade  $\leq r - 1$ .

1. Für  $\alpha < 0$  konvergiert  $e^{-|\alpha|t} \cdot (\mathbf{P}(t) \cdot \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \cdot \sin \beta t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , denn  $e^{-|\alpha|t} \rightarrow 0$  und die trigonometrischen Funktionen sind ohnehin durch 1 beschränkt. Wenn für alle Eigenwerte  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  gilt, dann ist für alle Lösungen  $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Dies ist nur ein Teil der asymptotischen Stabilität, die Stabilität kann man durch etwas genauere Abschätzung zeigen.

2. Gibt es ein  $k$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , so geht die zugehörige Lösung für  $t \rightarrow \infty$  gegen Unendlich.
3. Sei  $\alpha = 0$ , dann ist  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \cdot \sin \beta t$ . Diese Lösung bleibt nur dann für alle Zeiten in der Nähe von  $\mathbf{0}$ , wenn  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  konstante Vektoren sind. Das tritt genau dann ein, wenn es genauso viele linear unabhängige Eigenvektoren gibt (deren maximale Anzahl ist die geometrische Vielfachheit!), wie die algebraische Vielfachheit angibt.

■

Im nichtlinearen Fall  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  sei wieder  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  die Gleichgewichtslage. (Hat man die Gleichgewichtslage  $\mathbf{a}$ , so kann man von  $\mathbf{f}$  zu  $\mathbf{f} - \mathbf{a}$  übergehen.) Sei zudem  $\mathbf{f}$  jetzt hinreichend oft stetig differenzierbar. Die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{0}$  sei  $\mathbf{f}'(\mathbf{0}) =: \mathbf{A}$ . Dann gilt analog zur Taylorformel:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \quad (14.10)$$

Für solche Systeme hängt das Stabilitätsverhalten von dem des zugehörigen **linearisierten Systems**  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  ab.

**Satz 14.12**

Betrachte  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  und es möge (14.10) gelten. Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  seien mit  $\lambda_k$  bezeichnet.

1. Ist  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  für alle  $k$ , so ist  $\mathbf{0}$  asymptotisch stabil.
2. Gibt es ein  $k$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , so ist  $\mathbf{0}$  instabil.
3. Im Falle  $\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = 0$  ist keine Aussage möglich.

Es gibt noch weitere Aussagen des asymptotischen Verhaltens von Differentialgleichungssystemen.

# 15 Bemerkungen zu Fourierreihen

Wir kennen Potenzreihen  $\sum_n a_n x^n$  und Entwicklungen von Funktionen  $f$  in Potenzreihen (Taylor-Reihen.) Die allgemeine Motivation liegt in mathematischen und physikalischen Problemen, zum Beispiel Differentialgleichungen. Die Lösungen dieser Probleme seien Funktionen  $f_n$ , welche mindestens linear unabhängig seien mögen. Nun möchte man für möglichst viele Lösungen  $f$  eine Darstellung der folgenden Form haben:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

Die  $(f_n)$  sind also eine Basis in einem geeigneten Vektorraum. Wir betrachten in diesem Kapitel spezielle Situationen: Nun seien die  $f_n$  Funktionen  $\cos nx$  und  $\sin nx$ . Unter einer **trigonometrischen Reihe** versteht man eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx] \quad (15.1)$$

Der Faktor bei  $a_0$  ist eine nützliche Konvention. Wegen der Periodizität der  $\cos nx$  und  $\sin nx$  betrachten wir diese Reihe nur auf  $[-\pi, \pi]$  (manchmal nimmt man auch  $[0, 2\pi]$ ). Für alle  $x \in [-\pi, \pi]$ , für die (15.1) konvergiert, erhalten wir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

Hierbei ist noch nicht festgelegt, in welchem Sinne die Reihe konvergieren soll (gleichmäßig, punktweise, evtl. noch anders). In welchem Zusammenhang stehen nun  $f$  und die  $a_n$  und  $b_n$ ? Hierfür brauchen wir das folgende Lemma.

## Lemma 15.1

Es bestehen die folgenden **Orthogonalitätsrelationen**.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \geq 1 \\ 2\pi & n = m = 0 \text{ für den Kosinus} \end{cases} \quad (15.3)$$

In kompakterer Schreibweise ist  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} \cdot \overline{e^{int}} \, dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Um die Herkunft des Namens „Orthogonalitätsrelation“ zu verstehen, betrachten wir in  $C[-\pi, \pi]$  das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx$$

Angenommen,  $f(x)$  sowie  $f(x) \cdot \cos nx$  und  $f(x) \cdot \sin nx$  seien für alle  $n$  über  $[-\pi, \pi]$  riemannintegrierbar. Weiterhin sei es möglich, in (15.2) nach Multiplikation mit  $\cos nx$  und  $\sin nx$  die entsprechenden Reihen gliedweise zu integrieren.

$$f(x) \cdot \cos mx = \frac{a_0}{2} \cdot \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx \cdot \cos mx + b_n \cdot \sin nx \cdot \cos mx]$$

Bei der Integration von  $-\pi$  bis  $\pi$  nutzen wir die Orthogonalitätsrelationen aus und erhalten

$$\begin{aligned} \text{für } m = 0 : \quad & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ \text{für } m \geq 1 : \quad & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx = a_m \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx \end{aligned}$$

Völlig analog geht man für den Sinus vor. Es ergeben sich die **Euler-Fourierschen Formeln**:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx \quad \text{für } m \geq 0 \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin mx \, dx \quad \text{für } m \geq 1 \end{aligned} \quad (15.4)$$

### Satz 15.2

Die trigonometrische Reihe (15.1) sei auf  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergent mit der Summe  $f$ . Dann gelten für die  $a_m$  und  $b_m$  die Euler-Fourierschen Formeln (15.4) und die  $a_m$  und  $b_m$  heißen **Fourierkoeffizienten** von  $f$ .

### Beweis

Dass die Reihe auf  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergiert, bedeutet, dass die Folge der Partialsummen

$$\left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx] \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

für  $x \in [-\pi, \pi]$  gleichmäßig konvergiert. Die Partialsummen sind stetige Funktionen, also auch die Grenzfunktion  $f$ . Damit sind auch  $f(x) \cdot \cos nx$  und  $f(x) \cdot \sin nx$  stetig, also  $\mathbb{R}$ -integrierbar. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf man die unendliche Reihe gliedweise integrieren, daraus folgen die Euler-Fourierschen Formeln (siehe oben). ■

Nun betrachten wir den umgekehrten Standpunkt. Sei  $f$  eine auf  $[-\pi, \pi]$   $\mathbb{R}$ -integrierbare Funktion. Nach (15.4) kann man die  $a_n$  und  $b_n$  berechnen und die trigonometrische Reihe (15.1) bilden. Diese Reihe heißt **Fourierreihe** von  $f$ . Uns stellen sich folgende Fragen:

- Konvergiert diese Reihe überhaupt?
- Wenn ja, in welchem Sinne?
- Was hat die Summe mit  $f$  zu tun?

Im folgenden Satz stellen wir einige hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Fourierreihe von  $f$  gegen  $f$  zusammen. Vorher führen wir folgende Bezeichnungen ein:  $f$  heißt auf  $[a, b]$  **stückweise stetig**, wenn  $f$  auf  $[a, b]$  bis auf endlich viele Punkte stetig ist und in allen Punkten aus  $(a, b)$  der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von  $f$  existieren (in  $a$  nur der rechts-, in  $b$  nur der linksseitige).

Sind  $f$  und  $f'$  auf  $[a, b]$  stetig, so sprechen wir hier von der **Glattheit** von  $f$ . Wenn  $f$  und/oder  $f'$  nur stückweise stetig ist, handelt es sich nur um **stückweise Glattheit**.

### Satz 15.3

1. Sei  $f$   $2\pi$ -periodisch und auf  $[-\pi, \pi]$  stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  punktweise für alle  $x$ . Die Summe ist gleich  $f(x)$  für alle  $x$ , an denen  $f$  stetig ist, ansonsten  $\frac{1}{2} \cdot [f(x-0) + f(x+0)]$ .
2. Sei  $f$   $2\pi$ -periodisch, stetig und stückweise glatt, dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  in jedem beschränkten Intervall von  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f$ .

#### Bemerkung

Die Bedingungen in 15.3.1 können noch weiter abgeschwächt werden. Eine völlig befriedigende Theorie erhält man erst im Rahmen der Hilbertraumtheorie auf Grundlage der sogenannten  $L^2$ -Räume (den Räumen der quadratisch integrierbaren Funktionen).

## Beispiele

Unsere Beispielfkt. sind auf  $[-\pi, \pi]$  gegeben und werden auf dem  $\mathbb{R}$  mit der Periode  $2\pi$  fortgesetzt.

1.  $f(x) = x$  für  $x \in (-\pi, \pi)$  und  $f(\pm\pi) = 0$

$f$  ist ungerade, somit entsteht eine Sinusreihe, denn  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos mx \, dx = \pi \cdot a_m = 0$ . Durch partielle Integration erhalten wir für  $m \geq 1$ :

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin mx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin mx}{m^2} - \frac{x \cdot \cos mx}{m} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{\pi \cdot \cos m\pi}{m} - \frac{\pi \cdot \cos m\pi}{m} \right) \\ &= \frac{2}{m} \cdot (-1)^{m+1} \end{aligned}$$

Die Funktion wird also durch folgende Fourierreihe dargestellt:

$$f(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin nx \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Daraus lesen wir ab:

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

Speziell erkennt man durch die Reihe bei  $x = \pi/2$ :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

2.  $f(x) = |x|$  für  $x \in [-\pi, \pi]$

$f$  ist gerade, somit entsteht eine reine Cosinusreihe.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \cos mx \, dx \\
 a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{\cos mx}{m^2} + \frac{x \cdot \sin mx}{m} \right]_0^{\pi} \\
 a_m &= \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{\cos m\pi}{m^2} - \frac{1}{m^2} \right) \\
 a_m &= \begin{cases} 0 & m \text{ gerade} \\ -\frac{4\pi}{m^2} & m \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Fourierreihe

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und wir lesen für  $x \in [-\pi, \pi]$  wiederum ab:

$$\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \cdot |x|$$

Im Speziellen sehen wir bei  $x = 0$ :

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

In den Anwendungen liegt häufig kein Intervall der Länge  $2\pi$  vor. Dennoch ist die Entwicklung in eine Fourierreihe mit den **allgemeinen Orthogonalitätsrelationen** für  $\cos \frac{\pi \cdot nx}{p}$  und  $\sin \frac{\pi \cdot nx}{p}$  möglich. Diese gelten für jedes Intervall der Länge  $2p$ :

$$\int_d^{d+2p} \cos \frac{\pi \cdot nx}{p} \cdot \cos \frac{\pi \cdot mx}{p} \, dx = \int_d^{d+2p} \sin \frac{\pi \cdot nx}{p} \cdot \sin \frac{\pi \cdot mx}{p} \, dx = p \cdot \delta_{mn} \quad \text{für } m, n \neq 0$$

$$\int_d^{d+2p} \sin \frac{\pi \cdot nx}{p} \cdot \cos \frac{\pi \cdot mx}{p} \, dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Häufig hat man eine Funktion auf einem Intervall  $[0, l]$  gegeben. Dann kann man obige Formel auf die Situation  $d = -l$  und  $p = l$  anwenden, wenn man  $f$  auf  $[-l, 0]$  geeignet erweitert. Geeignete Erweiterungen sind zum Beispiel die gerade und die ungerade Fortsetzung, d.h.  $f$  wird so fortgesetzt, dass es in  $[-l, l]$  gerade bzw. ungerade ist.

# 16 Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen

Eine Gleichung der Form

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^{i_n} \dots \partial x_1^{i_1}}\right) = 0 \quad (16.1)$$

mit einer gesuchten Funktion  $u$  von  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  heißt **partielle Differentialgleichung** (kurz PDE von englisch „partial differential equation“). Wir führen die folgenden Begriffe ein:

- **Ordnung:** höchste auftretende Ableitung ( $m$ )
- **Lösung:** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Jede Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ , die stetige partielle Ableitungen bis einschließlich  $m$ -ter Ordnung besitzt und (16.1) erfüllt, heißt Lösung oder genauer **klassische Lösung** von (16.1) im Gebiet  $G$ . Dieser Lösungsbegriff ist später zur Erarbeitung einer wirkungsvollen Theorie zu eng.
- **Lineare PDE:**  $F$  ist linear in  $u$  und allen Ableitungen, die Koeffizienten können von den  $x_i$  abhängen. (Wenn nicht, heißt die DGL linear mit **konstanten Koeffizienten**). Zum Beispiel für  $n = m = 2$ :

$$a_{11} \cdot u_{xx} + a_{12} \cdot u_{xy} + a_{22} \cdot u_{yy} + b_1 \cdot u_x + b_2 \cdot u_y + c \cdot u + d = 0$$

Alle Koeffizienten können von  $x$  und  $y$  abhängen.

- **Quasilineare PDE:** Es liegt Linearität nur in den höchsten Ableitungen vor. Ein Beispiel für  $n = m = 2$ :

$$a_{11} \cdot u_{xx} + a_{12} \cdot u_{xy} + a_{22} \cdot u_{yy} = 0$$

Alle Koeffizienten können von  $x, y, u, u_x$  und  $u_y$  abhängen.

## Beispiele für wichtige partielle Differentialgleichungen

1. *Schwingungsgleichung:*  $\square_a u = f$  mit  $\square_a = \frac{d^2}{dt^2} - a^2 \cdot \Delta$

$\square_a$  ist der d'Alembert-Operator und  $\Delta$  der Laplaceoperator. Je nachdem, ob dieser in ein, zwei oder drei Dimensionen vorliegt, spricht man von einer ein-, zwei- oder dreidimensionalen Wellengleichung.

- a) eindimensional (schwingende Saite):  $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} + f$   
 $u(t, x)$  ist die Auslenkung der Saite zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  und  $f$  ist eine äußere Anregung.
- b) zweidimensional (schwingende Membran):  $u_{tt} = a^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy}) + f$
- c) dreidimensional (Ausbreitung elektromagn. Wellen):  $u_{tt} = a^2 \cdot (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$

2. *Wärmeleitungsgleichung:*  $u_t = a^2 \cdot \Delta u + f$

$u(t, x)$  ist die Temperatur zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$ .

3. Stationäre Gleichungen ohne Abhängigkeit von  $t$

- Laplace-Gleichung:  $\Delta u = 0$
- Poisson-Gleichung:  $\Delta u = -f$
- Helmholtz-Gleichung:  $\Delta u + k^2 \cdot u = -f/a^2$

Weitere Gleichungen aus der mathematischen Physik, zum Beispiel die Maxwellgleichungen und die Schrödingergleichung.

## Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Betrachte eine quasilineare PDE zweiter Ordnung:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_i}) = 0 \quad \text{mit} \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n \quad (16.2)$$

Dieser PDE ordnen wir die symmetrische Matrix  $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$  und die entsprechende quadratische Form

$$Q(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot y_i \cdot y_j$$

zu. Für festes  $x$  ist  $Q$  eine aus der linearen Algebra bekannte quadratische Form.

### Beispiel 16.1

Zu der Differentialgleichung  $u_{xx} + 2x \cdot u_{xy} + y \cdot u_{yy} + u_x^2 - u \cdot u_y = 0$  gehört die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & y \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass sich der Vorfaktor  $2x$  symmetrisch auf  $u_{xy}$  und  $u_{yx}$  aufteilt.

Mit  $\mathbf{A}$  können wir eine Hauptachsentransformation (sprich: Diagonalisierung) durchführen. Sind  $\lambda_i(x)$  die reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}(x)$ , dann wird  $Q$  transformiert in

$$Q^*(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \cdot y_i^2$$

### Definition 16.1

Die quasilineare PDE (16.2) heißt im Punkt  $x \in G$ :

- **elliptisch**, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben.
- **hyperbolisch**, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind und bis auf genau einen dasselbe Vorzeichen haben.
- **ultrahyperbolisch**, wenn  $n \geq 4$  ist, alle Eigenwerte von Null verschieden sind und es je mindestens zwei positive und zwei negative Eigenwerte gibt.
- **parabolisch**, wenn mindestens ein Eigenwert Null ist.

Wenn (16.2) für alle  $x \in G$  einen bestimmten Typ hat, dann hat (16.2) den betreffenden Typ in  $G$ .



**Beispiel 16.2** im dreidimensionalen Raum

1. Die Wellengleichung hat die Eigenwerte 1,  $-1$ ,  $-1$  und  $-1$ . Sie ist somit hyperbolisch.
2. Die Wärmeleitungsgleichung hat die Eigenwerte 0,  $-1$ ,  $-1$  und  $-1$ . Sie ist somit parabolisch.
3. Die Laplacegleichung hat die Eigenwerte 1, 1 und 1. Sie ist somit elliptisch.

**Koordinatentransformation in partiellen Differentialgleichungen**

Für viele Betrachtungen ist es günstig, die betreffende Differentialgleichung auf eine einfache Gestalt (Normalform) zu transformieren. Dies soll an folgendem Beispiel demonstriert werden:

$$A \cdot u_{xx} + B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = 0 \quad (16.3)$$

Hierbei sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstanten. Mit der linearen Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} r &:= \alpha \cdot x + \beta \cdot y \\ s &:= \gamma \cdot x + \delta \cdot y \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0 \quad (16.4)$$

werden die Variablen in (16.3) mithilfe der Kettenregel auf die Variablen  $r$  und  $s$  umgerechnet. Die Determinantenbedingung ist nötig, damit das Ergebnis zurücktransformiert werden kann.

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cdot r_x + u_s \cdot s_x = \alpha \cdot u_r + \gamma \cdot u_s \\ u_y &= u_r \cdot r_y + u_s \cdot s_y = \beta \cdot u_r + \delta \cdot u_s \\ u_{xx} &= \alpha^2 \cdot u_{rr} + 2\alpha\gamma \cdot u_{rs} + \gamma^2 \cdot u_{ss} \\ u_{xy} &= \alpha\beta \cdot u_{rr} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot u_{rs} + \gamma\delta \cdot u_{ss} \\ u_{yy} &= \beta^2 \cdot u_{rr} + 2\beta\delta \cdot u_{rs} + \delta^2 \cdot u_{ss} \end{aligned}$$

Einsetzen in (16.3) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= (A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha\beta + C \cdot \beta^2) \cdot u_{rr} \\ &+ (A \cdot \gamma^2 + B \cdot \gamma\delta + C \cdot \delta^2) \cdot u_{ss} \\ &+ [2A \cdot \alpha\gamma + B \cdot (\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C \cdot \beta\delta] \cdot u_{rs} \end{aligned} \quad (16.5)$$

Man kann die Koeffizienten so wählen, dass die ersten Summanden in (16.5) verschwinden. Wähle zuerst  $\beta = \delta = 1$ . Dann erhält man die Bedingung

$$A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha + C = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot \gamma^2 + B \cdot \gamma + C = 0$$

Hier haben wir o.E.d.A. angenommen, dass  $A \neq 0$  ist. Sonst muss  $C \neq 0$  sein und man würde  $\alpha = \gamma = 1$  wählen. Für  $A = C = 0$  hätte (16.3) schon eine einfachere Form. Aus den obigen Bedingung erkennt man, dass  $\alpha$  und  $\gamma$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $A \cdot m^2 + B \cdot m + C = 0$  sein müssen. Wähle also etwa

$$\alpha := m_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{und} \quad \gamma := m_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (*)$$

Damit wird aus (16.5):

$$[2A \cdot m_1 \cdot m_2 + B \cdot (m_1 + m_2) + 2C] = 0$$

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt  $m_1 + m_2 = -B/A$  und  $m_1 \cdot m_2 = C/A$ . Damit kommen wir letztendlich auf

$$\frac{4AC - B^2}{A} \cdot u_{rs} = 0 \quad (16.6)$$

Also hängt jetzt alles von der Diskriminante der quadratischen Gleichung ab, und das sogar in zweierlei Hinsicht. Einerseits für die Klassifikation der Differentialgleichung, denn aus (16.3) folgt für die zugehörige Matrix und deren charakteristisches Polynom:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - (A + C) \cdot \lambda + \frac{4AC - B^2}{4} = 0$$

Wiederum mit dem Vieta'schen Satz ist  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{4AC - B^2}{4}$ , somit ist die Differentialgleichung

- *elliptisch* für  $4AC - B^2 > 0$  (beide Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen)
- *hyperbolisch* für  $4AC - B^2 < 0$  (die Eigenwerte haben verschiedene Vorzeichen)
- *parabolisch* für  $4AC - B^2 = 0$  (mindestens ein Eigenwert verschwindet)

Desweiteren hat die Diskriminante natürlich Auswirkungen auf die Struktur der Lösung:

1. Für  $4AC - B^2 \neq 0$  vereinfacht sich die Differentialgleichung zu  $u_{rs} = 0$ . Dies kann man entweder nach  $r$  oder nach  $s$  integrieren und erhält  $u_r = g(r)$  und  $u_s = f(s)$ . Sind  $G(r)$  und  $F(s)$  Stammfunktionen dieser  $g(r)$  und  $f(s)$ , so folgt als Lösung  $u = G(r) + F(s)$ . In den Koordinaten  $x$  und  $y$  lautet die Lösung von (16.3) damit

$$u(x, y) = F(m_2 \cdot x + y) + G(m_1 \cdot x + y) \quad (16.7)$$

Dabei sind  $F$  und  $G$  beliebige, in  $G$  stetig differenzierbare Funktionen. War die PDE hyperbolisch, so haben wir zwei verschiedene  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ . Im elliptischen Falle sind die Lösungen komplex und zueinander konjugiert, also  $m_2 = \bar{m}_1$ .

2. Im parabolischen Fall ( $4AC - B^2 = 0$ ) gibt es nur eine Doppellösung  $m = -\frac{B}{2A}$  für (16.6), somit ergibt sich nur  $0 = 0$ . Der Ausweg ist eine andere Koordinatentransformation. Statt (16.4) nehmen wir nun  $r := mx + y$  und  $s := x$ . Dann erhält man aus (16.5) mit  $\alpha = m$ ,  $\beta = \gamma = 1$  und  $\delta = 0$  unter der Bedingung  $A \cdot m^2 + B \cdot m + C = 0$ :

$$u_{ss} = 0$$

Hieraus folgt durch Integration erst  $u_s = G(r)$  und dann  $u = F(r) + s \cdot G(r)$ . Mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  erhält man

$$u(x, y) = F(mx + y) + x \cdot G(mx + y) \quad (16.8)$$

### Beispiel 16.3

Wir betrachten die eindimensionale Schwingungsgleichung:

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = 0 \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Statt  $u(x, y)$  haben wir nun  $u(t, x)$ . Es ist  $A = 1$ ,  $B = 0$  und  $C = -a^2$ . Die Lösungen der quadratischen Gleichung haben die Form  $m_1 = a$  und  $m_2 = -a$ . Diese Lösungen werden in (16.7) eingesetzt und man erhält die **D'Alembertsche Lösung der Schwingungsgleichung**:

$$u(t, x) = F(x - at) + G(x + at) \quad (16.9)$$

Aus den bisherigen Betrachtungen sieht man schon, dass in den Lösungen von PDE nicht beliebige Konstanten (wie bei gewöhnlichen DGL), sondern beliebige Funktionen auftauchen. Diese beliebigen Funktionen müssen dann durch Anfangs- bzw. Randbedingungen eindeutig bestimmt werden, wenn die Probleme eindeutig lösbar sind.

Im Folgenden behandeln wir typische PDE verschiedener Typen für konkrete Aufgabenstellungen.

# 17 Parabolische partielle Differentialgleichungen

Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = a^2 \cdot \Delta u + f \quad (17.1)$$

beschreibt für einen Körper  $K$  die Temperaturverteilung  $u(x, t)$  in jedem Raumpunkt  $x = (x_1, x_2, x_3)$  zur Zeit  $t$ . Um diese Gleichung eindeutig zu lösen, braucht man zusätzliche Informationen. Typischerweise hat man eine Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .  $\varphi$  beschreibt eine vorgegebene Anfangstemperaturverteilung. Als weitere Randbedingungen nutzt man das Wechselspiel von  $K$  mit der Umgebung:

- Randbedingung 1. Art: **Dirichlet-Bedingung**

Die Temperatur auf der Oberfläche von  $K$  ist konstant oder mit vorgegebener Verteilung:

$$u(x, t) = u_0(x, t) \quad \forall x \in \partial K, t \geq 0 \quad (17.3)$$

- Randbedingung 2. Art: **Neumann-Bedingung**

Der Wärmefluss von der Oberfläche in die Umgebung ist vorgegeben:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \Psi(x, t) \quad \forall x \in \partial K, t \geq 0 \quad (17.4)$$

$n$  ist die äußere Normale an  $\partial K$  in  $x$ .

- Randbedingung 3. Art: **gemischte Randbedingung**

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + u = u_0 \quad \forall x \in \partial K, t \geq 0$$

$h$  ist die relative Wärmeübergangszahl.

Hat man Anfangs- und Randbedingungen, so spricht man von einem **Anfangs-Randwert-Problem** (ARWP) 1., 2. oder 3. Art (entsprechend der obigen Klassifikation von Randbedingungen).

## 17.1 1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Homogene Aufgabe

Ein homogener dünner Stab der Länge  $l$  mit isolierter Mantelfläche liegt im Intervall  $[0, l]$  auf der  $x$ -Achse. Der Wärmefluss gehe nur in  $x$ -Richtung. Die Funktion  $u(x, t)$  beschreibt die Temperatur am Ort  $x$  zur Zeit  $t$ . An den Enden  $x = 0$  und  $x = l$  wird der Temperaturverlauf vorgegeben. Wir lösen also die folgende Aufgabe:

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} & \quad u_t = a^2 \cdot u_{xx} + f(x, t) & \text{mit} & \quad 0 \leq x \leq l \quad \text{und} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingung:} & \quad u(x, 0) = \varphi(x) & \text{mit} & \quad 0 \leq x \leq l \\ \text{Randbedingung:} & \quad u(0, t) = \varphi_1(t) \\ & \quad u(l, t) = \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (17.6)$$

Als **Kompatibilitätsbedingungen** ergeben sich  $\varphi(0) = \varphi_1(0)$  und  $\varphi(l) = \varphi_2(0)$ . Wir lösen nun die homogene Aufgabe, d.h. wir setzen  $f = \varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$ . ( $\varphi \equiv 0$  ist sinnlos.) Die Lösung erfolgt nun im Wesentlichen in vier Schritten:

1. *Bestimmung der speziellen Lösungen von (17.6) durch den Separationsansatz*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= X(x) \cdot T(t) \\ u_{xx}(x, t) &= X''(x) \cdot T(t) \\ u_t(x, t) &= X(x) \cdot T'(t) \end{aligned}$$

Diesen Ansatz setzen wir in (17.6) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T'(t) &= a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T'(t)}{a^2 \cdot T(t)} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist unabhängig von  $x$ , die linke unabhängig von  $t$ . Wenn man eine der Variablen  $x$  und  $t$  ändert, bleibt also eine (und damit auch die andere Seite) konstant. Es muss also gelten:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \lambda$$

$\lambda$  heißt **Separationsparameter**. Es entstehen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0 \quad \text{und} \quad T'(t) - a^2 \lambda \cdot T(t) = 0$$

Man spricht hierbei von **Eigenwertproblemen** (für die Differentialoperatoren  $d/dt$  und  $d^2/dx^2$ ). Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- Für  $\lambda = 0$  ist  $X(x) = C_1 \cdot x + C_2$  und  $T(t) = C$ , also  $u(x, t) = C \cdot C_1 \cdot x + C \cdot C_2$ .
- Für  $\lambda > 0$  ist  $X(x) = A_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x}$  und  $T(t) = e^{\lambda \cdot a^2 \cdot t}$ . Für  $T(t)$  haben wir den konstanten Vorfaktor weggelassen, da diese beim Übergang zu  $u$  sowieso in den  $A_i$  aufginge:

$$u(x, t) = \left( A_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x} \right) \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t}$$

- Für  $\lambda < 0$  wollen wir natürlich nur reelle Lösungen haben und erhalten deshalb

$$u(x, t) = \left[ A_1 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + A_2 \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) \right] \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t}$$

Aus der Erfahrung wissen wir, dass, wenn die Temperatur bei  $x = 0$  und  $x = l$  auf Null gehalten wird, die Temperatur des gesamten Stabes für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Diese Bedingung erfüllt nur  $\lambda < 0$ .

2. *Anpassung an die homogenen Randbedingungen*

Aus  $u(0, t) = A_2 \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t} \stackrel{!}{=} 0$  folgt  $A_2 = 0$ . Die andere Randbedingung ergibt:

$$u(l, t) = A_1 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot l) \cdot e^{a^2 \lambda \cdot t} \stackrel{!}{=} 0$$

Da  $A_1 = 0$  sinnlos ist, muss der Sinus verschwinden und somit  $\sqrt{-\lambda} \cdot l$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  sein. Also hat  $\lambda$  die folgenden Möglichkeiten:

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese  $\lambda_n$  heißen **Eigenwerte** des Problems mit den zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

## 3. Anpassung an die Anfangsbedingungen durch Reihenansatz

In der Regel erfüllen einzelne  $u_n$  oder endliche Linearkombinationen aus diesen die Anfangsbedingungen nicht. Der Ausweg ist ein Reihenansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot u_n(x, t)$$

Wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert, kann man gliedweise differenzieren.  $u$  erfüllt bereits die Differentialgleichung und die Randbedingungen, wir setzen also nun die Anfangsbedingungen ein:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l}$$

Die  $a_n$  ermitteln wir über die Entwicklung von  $\varphi(x)$  in eine Fourierreihe. (Deshalb heißt diese Methode auch **Fourier-Methode**.) Mit den allgemeinen Orthogonalitätsrelationen erhält man

$$\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} dx = a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} dx = a_n \cdot \frac{l}{2}$$

Daraus folgt für die Koeffizienten der Reihe:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot \xi}{l} d\xi \quad (17.7)$$

Eine Fourierreihe entsteht, wenn  $\varphi$  stetig und (stückweise) stetig differenzierbar ist.

## 4. Probe, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde; Untersuchung der Struktur der Lösung

In unserem Falle soll es genügen, die Lösung nur hinzuschreiben:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot \xi}{l} d\xi \right] \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t}$$

Man kann die Summe und das Integral vertauschen:

$$u(x, t) = \int_0^l \left[ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi \cdot \xi}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t} \right] \cdot \varphi(\xi) d\xi$$

Der Klammerterm wird mit  $G(x, \xi, t)$  bezeichnet und heißt **Greensche Funktion** des ersten ARWP.  $G$  ist unabhängig von der Anfangsbedingung  $\varphi$ . Insgesamt ergibt sich also die Lösung

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \cdot \varphi(\xi) d\xi$$

Man kann nun auch  $u(x, t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  nachweisen. Bleibt man bei der homogenen Differentialgleichung ( $f \equiv 0$ ), dann kann man ohne großen Aufwand zum Beispiel noch folgende RB behandeln:

1.  $u(0, t) = T_1$  und  $u(l, t) = T_2$  für  $t \geq 0$
2. isolierte Stabenden (d.h. kein Wärmefluss):  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$
3. Wärmekonvektion an einem Ende:  $u(0, t) = 0$  und  $u(l, t) + u_x(l, t) = 0$  für  $t \geq 0$

## 17.2 1. Anfangs-Randwert-Problem für einen endlich langen Stab. Inhomogene Aufgabe

Wir betrachten nun dieselbe Differentialgleichung mit  $f \neq 0$ , aber homogenen Anfangs- und Randbedingungen  $u(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0$ . Eine Methode zur Lösung ist die Variation der Konstanten. Wir kennen die Eigenfunktionen

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} \cdot t}$$

der homogenen Differentialgleichung und Randbedingungen. Jetzt machen wir den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \cdot u_n(x, t) =: \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi \cdot x}{l} \quad (17.8)$$

Bei diesem Ansatz bleiben die homogenen Randbedingungen natürlich erhalten. Für die Anfangsbedingung erhält man jetzt

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(0) \cdot \sin \left( \frac{n\pi}{l} \cdot x \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Wir fordern also sinnvollerweise  $w_n(0) = 0$  und benutzen diese Bedingung später als Anfangsbedingung für  $w_n$ . Nun denken wir uns  $f$  als Funktion von  $x$  vom Intervall  $(0, l)$  ungerade fortgesetzt ( $t$  wird als Parameter betrachtet) und nach Sinusfunktionen entwickelt ( $f$  sei hierfür hinreichend gut):

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot x \right) \quad \text{mit} \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \cdot \int_{-l}^l f(\xi, t) \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot \xi \right) d\xi \quad (17.9)$$

(17.8) und (17.9) werden in die PDE eingesetzt. Nach formaler Rechnung folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot x \right) \cdot \left[ w_n'(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot w_n(t) - f_n(t) \right] = 0$$

Dies ist erfüllt, wenn  $[\dots] = 0$  für alle  $n$  gilt. Es muss also für alle  $n$  das AWP

$$w_n'(t) + \left( \frac{\pi n a}{l} \right)^2 \cdot w_n(t) = f_n(t) \quad \text{und} \quad w_n(0) = 0$$

gelöst werden. Es folgt mit Variation der Konstanten und (17.9):

$$\begin{aligned} w_n(t) &= e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \int_0^t e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot \tau} \cdot f_n(\tau) d\tau \\ w_n(t) &= \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot f_n(\tau) d\tau \\ w_n(t) &= \int_0^t \int_0^l \frac{2}{l} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot \xi \right) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

Setze alles in (17.8) ein und vertausche die Summationsprozesse:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left[ \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot \xi \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} \cdot x \right) \right] \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Der Klammerausdruck entspricht der Greenschen Funktion  $G(x, \xi, t - \tau)$  des Problems mit zeitlich verschobenem Argument, welche unabhängig von  $f$  ist. Man hat damit die Darstellung

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

# 18 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen

## 18.1 Die schwingende Saite

$$u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \quad (18.1)$$

Hierbei sei  $x$  aus einem endlichen oder einem unendlichen Intervall. Als Anfangsbedingungen haben wir Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit. Ob Randbedingungen vorliegen (1. bis 3. Art ist möglich), hängt davon ab, ob ein endliches oder ein unendliches Intervall betrachtet wird.

### 18.1.1 Die d'Alembertsche Methode

Im Kapitel 16 wurde für die homogene Differentialgleichung ( $f \equiv 0$ ) folgende Lösungsform gefunden:

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at) \quad (18.2)$$

Hierbei sind  $F$  und  $G$  beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen.

1. Betrachte das Problem auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Differentialgleichung:} & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} & u(x, 0) = \varphi(x) \\ & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}$$

Zuerst setzen wir die erste Anfangsbedingung in (18.2) ein:

$$F(x) + G(x) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) + G'(x) = \varphi'(x) \quad (18.3)$$

Die zweite Anfangsbedingung liefert (durch Zeitableitung von (18.2), genommen bei  $t = 0$ ):

$$-a \cdot F'(x) + a \cdot G'(x) = \psi(x) \quad (18.4)$$

(18.3) und (18.4) bilden ein Differentialgleichungssystem für  $F$  und  $G$ . Es folgt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi'(x) - \frac{1}{a} \cdot \psi(x) \right] \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x) - \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^x \psi(\xi) \, d\xi \right] \\ G'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi'(x) + \frac{1}{a} \cdot \psi(x) \right] \quad \Rightarrow \quad G(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x) + \frac{1}{a} \cdot \int_{x_1}^x \psi(\xi) \, d\xi \right] \end{aligned}$$

Die erste Anfangsbedingung ist für  $x_0 = x_1$  erfüllt, die zweite ohnehin, da wir sie für die Lösung benutzt haben. Also gilt:

$$F(x - at) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x - at) - \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^{x - at} \psi(\xi) \, d\xi \right] \quad \text{und} \quad G(x + at) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \varphi(x + at) + \frac{1}{a} \cdot \int_{x_0}^{x + at} \psi(\xi) \, d\xi \right]$$

Die Lösung des Anfangswertproblems wird also gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi \\ u(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(x + at) - \Psi(x - at)] \end{aligned} \quad (18.5)$$

Hierbei ist  $\Psi$  eine Stammfunktion von  $\psi$ . Diese Darstellung, insbesondere die mit den Integralen, gestattet folgende Interpretation: Betrachte in der  $(x, t)$ -Ebene den festen Punkt  $(x_0, t_0)$ . Der Wert  $u(x_0, t_0)$  hängt nur von den Werten von  $\varphi$  und  $\psi$  im Intervall  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$  ab. Dieses Intervall heißt **Abhängigkeitsintervall**. Umgekehrt hat das Intervall ein **Einflussgebiet** (das sind alle Punkte, in denen  $u(x, t)$  nur von den Werten von  $\varphi$  und  $\psi$  in diesem Intervall abhängt). Das Einflussgebiet ist genau das Dreieck, das durch die Punkte  $(x_0 - at_0, 0)$ ,  $(x_0 + at_0, 0)$  und  $(x_0, t_0)$  beschrieben und durch die Geraden  $x = at + (x_0 - at_0)$  sowie  $x = -at + (x_0 + at_0)$  begrenzt wird. Diese Geraden heißen **Charakteristiken** der Wellengleichung.

Um später mit Lösungen der Wellengleichung in der Ebene oder im Raum vergleichen zu können, schreiben wir (18.5) um, indem wir den folgenden Mittelungsoperator einführen:

$$(M_{at}^1 g)(x) := \frac{1}{2at} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) \, d\xi$$

Aus (18.5) in der Darstellung mit dem Integral wird dann

$$u(x, t) = t \cdot (M_{at}^1 \psi)(x) + \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot M_{at}^1 \varphi)(x)$$

2. Das Problem wird nun in  $[0, l]$  behandelt, die Saite sei an ihren Enden fest eingespannt.

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} \quad & u(x, 0) = \varphi(x) \\ & u_t(x, 0) = \psi(x) \\ \text{Randbedingungen:} \quad & u(0, t) = 0 \\ & u(l, t) = 0 \end{aligned}$$

Zur Lösung setzt man  $\varphi$  und  $\psi$  auf ganz  $\mathbb{R}$  periodisch fort und wendet dann (18.5) an. Zuerst folgen aus den Anfangs- und Randbedingungen Verträglichkeitsbedingungen:

$$u(0, 0) = \varphi(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(l, 0) = \varphi(l) = 0$$

Die Randbedingung  $u(0, t) = 0$  liefert mit (18.5):

$$0 = \frac{1}{2} \cdot [\varphi(at) + \varphi(-at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(at) - \Psi(-at)]$$

Das ist erfüllt, wenn  $\varphi$  ungerade,  $\Psi$  gerade und somit  $\psi$  ungerade ist. (Ableitungen gerader Funktionen sind immer ungerade und umgekehrt.) Die andere Randbedingung  $u(l, t) = 0$  liefert analog:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot [\varphi(l + at) + \varphi(l - at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(l + at) - \Psi(l - at)]$$

Benutzt man, dass  $\varphi$  ungerade und  $\Psi$  gerade ist, also

$$\varphi(l - at) = -\varphi(-l + at) \quad \text{und} \quad \Psi(l - at) = \Psi(-l + at)$$

so folgt

$$0 = \frac{1}{2} \cdot [\varphi(l + at) - \varphi(-l + at)] + \frac{1}{2a} \cdot [\Psi(l + at) - \Psi(-l + at)]$$

Das ist erfüllt, wenn  $\varphi$  und  $\Psi$  (und damit auch  $\psi$ ) periodisch mit der Periode  $2l$  sind. Die Lösung des Anfangs-Randwert-Problems wird durch die Formel (18.5) gegeben, wenn man  $\varphi$  und  $\psi$  als ungerade Funktionen mit der Periode  $2l$  vom Intervall  $0 \leq x \leq l$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt. Aus den Verträglichkeitsbedingungen folgt, dass die Randbedingungen automatisch erfüllt sind.



## 18.1.2 Die Fouriersche Methode

Betrachte das **homogene Anfangs-Randwert-Problem**:

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} & \quad u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} & \quad u(x, 0) = \varphi(x) \\ & \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \\ \text{Randbedingungen:} & \quad u(0, t) = 0 \\ & \quad u(l, t) = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung erfolgt mit der Fourierschen Methode analog zur Wärmeleitungsgleichung.

### 1. Separationsansatz

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x)$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, trennt  $T$  und  $X$  und führt dann eine Separationskonstante ein, so erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0 \quad \text{und} \quad T''(t) - \lambda a^2 \cdot T(t) = 0$$

Die erste hat die Lösung  $X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x}$ , die zweite betrachten wir gleich.

### 2. Anpassung an die Randbedingungen

Die Fälle  $\lambda = 0$  und  $\lambda > 0$  führen zu  $X \equiv 0$ . Eine nichttriviale Lösung ergibt sich nur für  $\lambda < 0$ :

$$X(x) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot x)$$

Aus der Randbedingung  $X(0) = 0$  folgt  $C_1 = 0$ . Wegen  $X(l) = 0$  muss  $\sin(\sqrt{-\lambda} \cdot l) = 0$  sein, folglich ist  $\sqrt{-\lambda} \cdot l = n\pi$  und somit  $\lambda = -n^2\pi^2/l^2$ . Es folgt

$$X(x) = C_2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)$$

Die Lösung von  $T''(t) - \lambda a^2 \cdot T(t) = 0$  mit obigem  $\lambda$  ist

$$T(t) = \hat{A}_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) + \hat{B}_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right)$$

und insgesamt folgt für  $u(x, t)$  in Abhängigkeit von  $n$ :

$$u_n(x, t) = \left[ A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)$$

### 3. Anpassung an die Anfangsbedingungen

Wieder verwenden wir einen Reihenansatz:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi a}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right)$$

Aus den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = \varphi(x)$  und  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{n\pi a}{l} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) = \psi(x)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus den Überlegungen zu Fourierreihen:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) dx \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot x\right) dx$$

Nun betrachten wir ein **inhomogenes Anfangs-Randwert-Problem**:

$$\begin{array}{ll} \text{Differentialgleichung:} & u_{tt} - a^2 \cdot u_{xx} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} & u(x, 0) = \varphi(x) \\ & u_x(x, 0) = \psi(x) \\ \text{Randbedingungen:} & u(0, t) = \psi_1(t) \\ & u(l, t) = \psi_2(t) \end{array}$$

Dazu unterscheiden wir in zwei Fälle.

1. Inhomogene Differentialgleichung und Randbedingungen sowie *homogene* Anfangsbedingungen  
Benutze das Superpositionsprinzip in der folgenden Variante:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

$u_1$  ist die allgemeine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung mit *inhomogenen* Anfangsbedingungen (welche wir bereits gefunden haben),  $u_2$  ist eine Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung mit *homogenen* Anfangsbedingungen (diese erhält man in Analogie zur Wärmeleitungsgleichung durch Variation der Konstanten).

2. Inhomogene Differentialgleichung und Randbedingungen sowie *inhomogene* Anfangsbedingungen  
Der Trick ist, das Problem durch Einführung einer Hilfsfunktion auf eines mit homogenen Anfangsbedingungen zurückzuführen, welches man wie oben beschrieben lösen kann.

$$v(x, t) := u(x, t) - \left[ \psi_1(t) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \right]$$

$v$  erfüllt die homogenen Randbedingungen

$$v(0, t) = u(0, t) - \psi_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad v(l, t) = u(l, t) - \psi_2(t) = 0$$

und die Anfangsbedingungen ändern sich zu

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \varphi(x) - \left[ \psi_1(0) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2(0) - \psi_1(0)] \right] =: \varphi^*(x) \\ v_t(x, 0) &= \psi(x) - \left[ \psi_1'(0) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2'(0) - \psi_1'(0)] \right] =: \psi^*(x) \end{aligned}$$

Wie ändert sich die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned} v_{tt} &= u_{tt} - \left[ \psi_1''(t) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2''(t) - \psi_1''(t)] \right] \\ v_{tt} - a^2 \cdot v_{xx} &= f(x, t) - \left[ \psi_1''(t) + \frac{x}{l} \cdot [\psi_2''(t) - \psi_1''(t)] \right] =: f^*(x, t) \end{aligned}$$

Das allgemeine Problem kann also immer auf den obigen Spezialfall reduziert werden.

### 18.1.3 Vergleich

Die d'Alembertsche Methode eignet sich gut für numerische Rechnungen. Außerdem sind das Abhängigkeitsgebiet und die Ausbreitung von Störungen gut erkennbar.

Die Fourierreihe mit ihrer Reihendarstellung einfacher Winkelfunktionen eignet sich gut für mathematische Operationen (z.B. Differentiation und Integration), und offenbart, wie sich verschiedene Schwingungen zu einer Auslenkungsfunktion überlagern.

## 18.2 Bemerkungen zu den Maxwell'schen Gleichungen

Wir benutzen eine möglichst einfache Form, ohne zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  bzw.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  zu unterscheiden.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (18.6a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 4\pi \cdot \mathbf{j} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \cdot \rho \quad (18.6b)$$

Dabei sind  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}$  Vektorfelder sowie die Ladungsdichte  $\rho$  ein Skalarfeld im  $\mathbb{R}^3$ . In (18.6a) blicken wir auf  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . Da  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ , möchte man den Ansatz  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  machen. (In einfach zusammenhängenden Gebieten impliziert aufgrund der Integrabilitätsbedingungen das Verschwinden der Divergenz die Existenz eines solchen Vektorfeldes.)  $\mathbf{A}$  ist das **Vektorpotential** zu  $\mathbf{H}$ .

Wenn  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$  beide den obigen Ansatz erfüllen, d.h.  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2$ , so ist  $\operatorname{rot}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0$ . Wiederum aus den Integrabilitätsbedingungen folgt die Existenz eines skalaren Feldes  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \operatorname{grad} \varphi$ , also  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \operatorname{grad} \varphi$ .

Jetzt muss noch die Zeitabhängigkeit der ersten Gleichung aus (18.6a) erfüllt werden:  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}$ . Wegen  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$  erfüllt etwa  $\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$  die Gleichung (18.6a). Für jede andere Lösung  $\mathbf{E}_2$  muss also auch  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}$  gelten. Somit ist auch  $\mathbf{E}$  nur bis auf den Gradienten eines skalaren Feldes  $V$  bestimmt.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (18.7)$$

Wie werden die Potentiale  $V$  und  $\mathbf{A}$  durch die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  festgelegt? Angenommen, man hat ein weiteres Paar  $(V', \mathbf{A}')$  mit entsprechenden Gleichungen. Also haben wir  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{H}$  und  $-\operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\operatorname{grad} V' - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}' = \mathbf{E}$ . Das gilt genau dann, wenn es ein differenzierbares Skalarfeld  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \quad \text{und} \quad V' = V - \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (18.8)$$

Die Tatsache, dass viele Paare  $(V, \mathbf{A})$  zugelassen sind, ist Ausdruck der **Eichinvarianz** der klassischen Elektrodynamik. Eine zusätzliche Bedingung an die Potentiale ist also möglich. Man nimmt die **Lorenzbedingung**:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} V = 0 \quad (18.9)$$

Was bedeuten (18.7) und (18.9) für die Funktion  $\varphi$ ? Es muss  $\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{\partial}{\partial t} V' = 0$  gelten, also ist  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial}{\partial t} V - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0$ . Daraus folgt eine homogene Wellengleichung:

$$\square \varphi = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \Delta \varphi = 0$$

Nun muss (18.6b) noch erfüllt werden. Mit (18.7) führen diese Gleichungen auf

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\Delta V + \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = \square V \stackrel{!}{=} 4\pi \rho$$

Dies ist eine inhomogene Wellengleichung. Nun wollen wir die erste Gleichung in (18.6b) betrachten.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} V + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}$$

Aufgrund der Lorenzgleichung ist  $\text{grad div } \mathbf{A} = -\text{grad } \frac{\partial}{\partial t} v = -\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } v$  und es verbleibt

$$\square \mathbf{A} = 4\pi \cdot \mathbf{j}$$

Schließlich folgt aus der Lorenzgleichung auch noch die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0 \quad (18.10)$$

**Bemerkung**

zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wenn man  $\varrho = \varrho(x, t)$ ,  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(x, 0)$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(x, 0)$  und  $\mathbf{j}$  vorgibt mit  $\text{div } \mathbf{H}_0 = 0$  und  $\text{div } \mathbf{E}_0 = 4\pi\varrho$  mit  $\varrho_0(x) = \varrho(x, 0)$  und wenn diese Anfangsdaten zum Beispiel beliebig oft differenzierbar sind, dann existiert eine eindeutige Lösung der Maxwellgleichungen.

Besonders ist, dass (18.6) acht Gleichungen für sechs Unbekannte sind. Trotzdem ist dieses System nicht überbestimmt, denn wenn  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \cdot \varrho$  und  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  für die Anfangsdaten gilt, dann auch für alle anderen Zeiten (hier ohne Beweis).

## 18.3 Bemerkungen zur mehrdimensionalen Wellengleichung

Wir behandeln nur die Wellengleichung im gesamten Raum ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ).

### Dreidimensionaler Fall

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & u_{tt} - a^2 \cdot \Delta u = f \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und } t \geq 0 \\ \text{Anfangsbedingungen:} \quad & u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}) \\ & u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (18.11)$$

Die Lösung für dieses Problem wird durch die **Poisson'sche Wellenformel** kompakt dargestellt:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} [t \cdot M_{at}^3 \varphi] + t \cdot M_{at}^3 \psi + \frac{1}{4\pi \cdot a^2} \cdot \iiint_{K_{at}} \frac{[f]}{r} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (18.12)$$

Hierbei sind

- $K_{at} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq at\}$  die Kugel um  $\mathbf{x}$  mit dem Radius  $at$
- $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- $[f](y_1, y_2, y_3, t) = f(y_1, y_2, y_3, t - r/a)$  eine retardierte Funktion
- $M_{at}^3 g := \frac{1}{4\pi \cdot a^2 t^2} \cdot \iint_{\partial K_{at}} g \, dS$  ein Mittelungsoperator in *drei* Dimensionen

Die Formel (18.12) kann man unter Ausnutzung physikalischer Überlegungen herleiten, oder prüfen, ob durch (18.12) das Problem (18.11) gelöst wird. Wir nehmen die Lösungsformel einfach als gegeben hin. Unser Ziel ist es nun, für den homogenen Fall ( $f \equiv 0$ ) mit der **Hadamardschen Abstiegsmethode** Lösungsformeln für den  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}$  herzuleiten.

## Zweidimensionaler Fall

Seien  $\varphi$  und  $\psi$ , also auch  $u$ , nur von  $x_1$  und  $x_2$  abhängig. Wir finden zuerst eine Parametrisierung für

$$\begin{aligned}\partial K_{at} &= \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) : \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2} = at \right\} \\ &= \left\{ \left( y_1, y_2, x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} \right) \right\}\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf die obere Halbkugel (daraus entsteht später ein Vorfaktor Zwei). Somit benötigen wir das Oberflächenelement für die Parametrisierung

$$(y_1, y_2) \mapsto \left( y_1, y_2, x_3 + \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} \right)$$

Integriert wird dann über den Kreis  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq at$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  und  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ . Für diese Art von Parametrisierungen gilt

$$(s, t) \mapsto (s, t, h(s, t)) \quad \Rightarrow \quad dS = \sqrt{1 + h_s^2 + h_t^2} \, ds dt$$

Mit einfacher Rechnung folgt in unserem Falle

$$dS = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} \, dy_1 dy_2$$

Damit erhält man aus (18.12) unter Berücksichtigung des Faktors Zwei:

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2 \cdot at^2}{4\pi \cdot a^2 t^2} \cdot \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq at} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{\dots}} \, dy_1 dy_2 \right) + t \cdot \frac{2 \cdot at}{4\pi \cdot a^2 t^2} \cdot \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq at} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{\dots}} \, dy_1 dy_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \cdot \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2 \right) + t \cdot \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2\end{aligned}$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot M_{at}^2 \varphi) + t \cdot M_{at}^2 \psi \quad (18.13)$$

Hierbei sind

- $K_{at}$  der Kreis um  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  mit dem Radius  $at$
- $\varrho^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$
- $M_{at}^2 g(y_1, y_2) := \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2$  ein Mittelungsoperator in *zwei Dimensionen*

### 18.3.1 Eindimensionaler Fall

Jetzt möge  $g$  nur von  $y_1$  abhängen. Dann kann man in der obigen Mittelwertbildung die Integration über  $y_2$  ausführen. In  $K_{at}$  ist

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = a^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = x_2 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2}$$

Analog zu oben kommt man auf einen Mittelungsoperator in einer Dimension:

$$\begin{aligned}M_{at}^1 g(y_1) &= \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \iint_{K_{at}} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \int_{x_2 - \sqrt{\dots}}^{x_2 + \sqrt{\dots}} \int_{x_1 - at}^{x_1 + at} \frac{g(y_1)}{\sqrt{a^2 t^2 - \varrho^2}} \, dy_1 dy_2\end{aligned}$$

Beachte: Wir müssen  $\sqrt{a^2t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}^{-1}$  über  $y_2$  integrieren. Diesen Term kann man mit  $b^2 = a^2t^2 - (x_1 - y_1)^2$  und  $z^2 = (y_2 - x_2)^2$  schreiben als

$$\int \frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}} dz = \arcsin \frac{z}{b}$$

Setzt man das in den Mittelungsoperator ein, so gilt

$$M_{at}^1 g(y_1) = \left[ \frac{1}{2\pi \cdot at} \cdot \int_{x_1-at}^{x_1+at} g(y_1) dy_1 \right] \cdot \underbrace{\left[ \arcsin \frac{y_2 - x_2}{\sqrt{a^2t^2 - (x_1 - y_1)^2}} \right]_{x_2-\sqrt{\dots}}^{x_2+\sqrt{\dots}}}_{=\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi}$$

$$M_{at}^1 g(y_1) = \frac{1}{2at} \cdot \int_{x_1-at}^{x_1+at} g(y_1) dy_1$$

Mit (18.13) ergibt sich (wenn man beachtet, dass  $\varphi$  und  $\psi$  jetzt nur noch von  $y_1$  abhängen) die d'Alembertsche Lösungsformel (18.5).

## Interpretation

Wir betrachten in (18.13) und (18.12) nur den Fall  $f \equiv 0$ .  $a$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und  $at$  die in der Zeit  $t$  zurückgelegte Strecke. Wir betrachten den Spezialfall, dass die Träger  $\text{supp } \varphi$  und  $\text{supp } \psi$  in einem beschränkten Gebiet  $G$  liegen, also kompakt sind.

Im Dreidimensionalen betrachten wir einen Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  in der Formel (18.12). Die Integrale werden über  $\varphi$  und  $\psi$  über die Kugeloberfläche  $\partial K_{at}$  erstreckt. Sie liefern höchstens für solche Zeiten  $t$  einen Beitrag, wenn  $\partial K_{at}$  das Gebiet  $G$  schneidet, denn sonst verschwinden  $\varphi$  und  $\psi$ . Also gibt es Grenzen  $d$  und  $D$ , sodass die Integrale maximal für  $d \leq at \leq D$ , also im Zeitintervall  $[d/a, D/a]$  nicht verschwinden. Für  $t < d/a$  ist die in  $G$  lokalisierte Erregung, dargestellt durch  $\varphi$  und  $\psi$ , noch nicht in  $P$  angekommen. Für  $t > D/a$  ist die Erregung an  $P$  vorbei.

Betrachte die Situation umgekehrt: Sei  $E$  die Menge aller Punkte, in denen zu fester Zeit  $t_0$  die Erregung nicht verschwindet. Sei der Einfachheit halber  $\text{supp } \varphi = \text{supp } \psi = G$  eine Kugel mit dem Radius  $R_0$ . Um  $E$  zu bilden, betrachte alle Kugeloberflächen  $\partial K_{at_0}$  ( $Q \in G$ ).  $E$  hat als Begrenzung die Einhüllenden dieser Kugeloberflächen: Die äußere Einhüllende entspricht der Vorderfront, die innere der Hinterfront.

Fazit: Räumlich lokalisierte Erregungen rufen in jedem Raumpunkt eine zeitlich lokalisierte Erregung hervor. Die Wellenausbreitung erfolgt mit scharf begrenzter Vorder- bzw. Hinterfront. Die gewonnene Erkenntnis wird als **Huygensches Prinzip** bezeichnet.

Im Zweidimensionalen gilt das Huygenssche Prinzip nicht, da man hier über die gesamte Kreisscheibe um  $\mathbf{x}$  integriert, nicht nur über deren Rand. Wenn  $G$  diese Kreisscheibe erst einmal berührt, tritt an  $\mathbf{x}$  für spätere Zeiten im Allgemeinen immer eine Erregung auf.

# 19 Elliptische partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten die Poisson-Gleichung (Potentialgleichung)

$$\Delta u = f$$

bzw. die Laplace-Gleichung für  $f \equiv 0$ . Eine Zeit  $t$  kommt nicht vor, daher sind Randwertaufgaben typisch. Der zweidimensionale Fall ist eng mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen (Funktionentheorie) verbunden.

Als Sprachgebrauch führen wir ein: Sei  $G$  ein Gebiet.  $u \in C^2(G)$  heißt **harmonisch**, wenn  $\Delta u = 0$ .

## 19.1 Die dreidimensionale Aufgabe

Als Demonstrationsbeispiel nehmen wir eine Kugel in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & 0 \leq r \leq \varrho \\ y &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \text{mit } 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ z &= r \cdot \cos \vartheta & -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Wir benötigen den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] \quad (*)$$

Die letzten zwei Terme in der Klammer beschreiben den **Laplace-Beltrami-Operator** auf der Einheitssphäre.

Zuerst betrachten wir den Spezialfall, dass  $u$  in  $\Delta u = 0$  nur von  $r$  abhängt. Wir haben also eine kugelsymmetrische Lösung. Aus (\*) wird

$$0 = \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{du}{dr} \right) = r^2 \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \cdot \frac{du}{dr}$$

Setze zum Beispiel  $u' =: v$ . Es entsteht

$$\frac{v'}{v} = -\frac{2}{r}$$

und als Lösung erhält man

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Im nächsten Kapitel wird  $u(r) = \frac{1}{r}$  die Grundlösung der Potentialgleichung sein. Nun betrachten wir den allgemeineren Fall der Laplace-Gleichung, bei der  $u$  von allen Koordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  abhängen kann. Hierzu benötigt man zwei Separationsansätze. Der erste ist

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung nach Multiplikation mit  $r^2$ :

$$r^2 \cdot R'' \cdot Y + 2r \cdot R' \cdot Y + R \cdot \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

Zur Separation wird durch  $R \cdot Y$  dividiert:

$$\frac{r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R'}{R} = -\frac{1}{Y} \cdot \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] =: \lambda$$

Damit erhält man die beiden Differentialgleichungen:

$$r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R' - \lambda \cdot R = 0 \quad (19.1)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda \cdot Y = 0 \quad (19.2)$$

(19.1) heißt **Eulersche Differentialgleichung**, diese behandeln wir später, wenn wir mehr Informationen über  $\lambda$  haben. Jetzt lösen wir (19.2). Dabei wollen wir nur Lösungen  $Y$ , die auf der Kugeloberfläche beschränkt sind und bzgl.  $\varphi$  die Periode  $2\pi$  haben, für die also insbesondere gilt:

$$|Y(0, \varphi)| < \infty \quad \text{und} \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty \quad \text{für} \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$Y(\vartheta, \varphi + 2\pi) = Y(\vartheta, \varphi)$$

Solche Lösungen heißen **Kugelflächenfunktionen** (manchmal auch nur Kugelfunktionen). Die Lösungen dieses Problems ergeben sich in Form von harmonischen homogenen Polynomen nach Einschränkung auf die Einheitssphäre.

- Polynome nullten Grades: 1
- Polynome ersten Grades:  $x_1, x_2, x_3$
- Polynome zweiten Grades:  $x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2, x_2^2 - x_3^2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_3, x_2 \cdot x_3$

Diese Funktionen sind jeweils homogen vom angegebenen Grade. Um die Kugelflächenfunktion weiter zu lösen, machen wir einen zweiten Separationsansatz: Mit  $Y(\vartheta, \varphi) = g(\vartheta) \cdot h(\varphi)$ . Einsetzen in (19.2) ergibt

$$\frac{h}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + \frac{g}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{d^2 h}{d\varphi^2} + \lambda \cdot gh = 0$$

Wir multiplizieren mit  $\sin^2 \vartheta / g \cdot h$  und trennen  $g$  und  $h$ .

$$\frac{\sin \vartheta}{g} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + \lambda \cdot \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{h} \cdot \frac{d^2 h}{d\varphi^2} =: \mu$$

Das sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für  $g$  und  $h$ .

$$h'' + \mu \cdot h = 0 \quad \text{mit} \quad h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi) \quad (19.3)$$

$$\sin \vartheta \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + (\lambda \cdot \sin^2 \vartheta - \mu) \cdot g = 0$$

Hier teilen wir durch  $\sin^2 \vartheta$ :

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{dg}{d\vartheta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \vartheta} \right) \cdot g = 0 \quad (19.4)$$

Aus (19.3) folgen Informationen über  $\mu$ : Als Lösungen kommen  $\cos(\sqrt{\mu}\varphi)$  und  $\sin(\sqrt{\mu}\varphi)$  infrage. Wegen der Periodizität ist  $\sqrt{\mu} = m \in \mathbb{N}_0$ . Davon sind

$$\sin m\varphi \quad \text{und} \quad \cos m\varphi \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N} \quad (19.5)$$



linear unabhängige Lösungen. (19.4) wird durch Substitution gelöst:

$$t := \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \cdot \frac{d}{dt}$$

Setzt man dies in (19.4) ein, erhält man eine neue Funktion  $G = G(t)$  mit  $G(t) = G(\cos \vartheta) = g(\vartheta)$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \cdot \frac{dG}{dt} \right] + \left( \lambda - \frac{\mu}{1-t^2} \right) \cdot G = 0 \quad \text{für} \quad -1 < t < 1 \quad (19.6)$$

Diese Differentialgleichung heißt

- für  $m = 0$  **Legendresche Differentialgleichung**
- für  $m \geq 1$  allgemeine Legendresche Differentialgleichung

### Satz 19.1

Die allgemeine Legendresche Differentialgleichung (19.6) hat genau für  $\lambda = n \cdot (n+1)$  mit  $n = m, m+1, \dots$  auf  $(-1, 1)$  beschränkte Lösungen. Diese werden folgendermaßen gegeben:

- für  $m = 0$  als **Legendresche Polynome**:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \quad (19.7a)$$

- für  $m \geq 1$  als zugeordnete Legendresche Polynome:

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2} \cdot P_n^{(m)}(t) \quad \text{mit} \quad P_n^{(m)}(t) = \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (19.7b)$$

Die Lösungen von (19.2) setzen sich aus (19.5) und (19.7) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \cos m\varphi & \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0 \\ P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \sin m\varphi & \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

1. Die Legendrepolynome bilden im Raum  $L^2[-1, 1]$  (grob: der Raum der Funktionen  $f$  auf  $[-1, 1]$  mit  $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < \infty$ ) ein vollständiges Orthogonalsystem (eine Orthogonalbasis).
2. Für jedes feste  $m \geq 1$  bilden die  $P_n^m$  mit  $n = m, m+1, \dots$  ein vollständiges Orthogonalsystem in  $L^2[-1, 1]$ .
3. Für jedes  $n$  existieren  $2n+1$  linear unabhängige Kugelflächenfunktionen der Ordnung  $n$ , welchen man der Übersichtlichkeit halber so schreibt:

$$\{Y_n^m(\vartheta, \varphi)\} = \left\{ \begin{aligned} & P_n^m(\cos \vartheta) \cdot \cos m\varphi : m = 0, 1, \dots, n; \\ & P_n^{-m}(\cos \vartheta) \cdot \sin(-m\varphi) : m = -1, -2, \dots, -n \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $-n \leq m \leq n$  bilden die  $Y_n^m$  auf der Einheitssphäre ein vollständiges Orthogonalsystem.

Es bleibt noch die **Eulersche Differentialgleichung** (19.1) zu behandeln:

$$r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R' - \lambda \cdot R = 0$$

Mit  $\lambda = n \cdot (n+1)$  ergeben sich die Lösungen:

$$R(r) = r^n \quad \text{und} \quad R(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

Will man auf der Kugel beschränkte Lösungen, muss man  $R(r) = r^n$  nehmen.

## Beispiel

Wir betrachten eine Randwertaufgabe 1. Art (Dirichlet-Problem) für das Innere eines Kreises mit dem Radius  $\varrho$ . Wir benutzen Polarkoordinaten ( $x = r \cdot \cos \varphi$  und  $y = r \cdot \sin \varphi$ ):

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & u_{rr} + \frac{1}{r} \cdot u_r + \frac{1}{r^2} \cdot u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < \varrho, -\pi < \varphi < \pi \\ \text{Randbedingung:} \quad & u(\varrho, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{für} \quad -\pi < \varphi < \pi \end{aligned}$$

Setze  $f$  als  $2\pi$ -periodisch voraus, also muss  $u$  ähnliche Periodizitätseigenschaften haben:

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi) \quad \text{und} \quad u_{\varphi}(r, -\pi) = u_{\varphi}(r, \pi)$$

Wir fordern, dass  $u$  für  $r \rightarrow 0+0$  endlich bleiben soll. Der Separationsansatz lautet  $u(r, \varphi) = R(r) \cdot H(\varphi)$ . Einsetzen und Trennung der Variablen führt auf die Differentialgleichungen

$$H'' + \lambda \cdot H = 0 \quad \text{mit} \quad H(\pi) = H(-\pi) \quad \text{und} \quad H'(\pi) = H'(-\pi) \quad (19.9)$$

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' - \lambda \cdot R = 0 \quad \text{mit} \quad R(r) \text{ endlich für } r \rightarrow 0+0 \quad (19.10)$$

Aus (19.9) findet man wiederum Lösungen für  $\lambda = \lambda_n = n^2$ :

$$H_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi & n \geq 1 \end{cases}$$

Das  $1/2$  ist wieder eine Normierungskonstante (vgl. Fourierreihe). (19.10) wird durch

$$R_n(r) = c_n \cdot r^n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Die Lösung der Randwertaufgabe erfolgt mit dem Ansatz

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cdot (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi) \quad (19.11)$$

Den Vorteil des Faktors  $\frac{1}{\varrho^n}$  sieht man beim Einsetzen der Randbedingung:

$$f(\varphi) = u(\varrho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi)$$

Ist  $f$  in eine Fourierreihe entwickelbar, so folgt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot \cos n\varphi' \, d\varphi' \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot \sin n\varphi' \, d\varphi' \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Einsetzen in (19.11) liefert

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \, d\varphi' + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cdot \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot (\cos n\varphi \cdot \cos n\varphi' + \sin n\varphi \cdot \sin n\varphi') \, d\varphi' \right]$$

Unter Beachtung des Additionstheorems  $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$  ist schließlich

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cdot \cos(n(\varphi - \varphi')) \right] d\varphi' \quad (**)$$

Es gilt der folgende Zusammenhang:

$$1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c^n \cdot \cos nx = \frac{1 - c^2}{1 - 2c \cdot \cos x + c^2} \quad \text{für } |c| < 1$$

Mit  $x := \varphi - \varphi'$  und  $c = r/\varrho$  kann man dies auf (\*\*) anwenden:

$$u(r, \varphi) = \frac{\varrho^2 - r^2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi')}{\varrho^2 - 2\varrho \cdot r \cdot \cos(\varphi - \varphi') + r^2} d\varphi' \quad (19.12)$$

Dies ist die **Poissonsche Integralformel** zur Lösung des inneren Dirichlet-Problems für den Kreis.

## 20 Ausblick auf moderne Methoden zur Behandlung partieller Differentialgleichungen

Die Idee ist, statt Differentialgleichungen Differentialoperatoren zu betrachten. Wenn zum Beispiel  $\Delta$  gegeben ist, so vermittelt  $\Delta$  eine lineare Abbildung von genügend oft differenzierbaren Funktionen in Funktionen.

Für praktische Anwendungen ist der bisherige Lösungsbegriff für Differentialgleichungen zu eng, etwa für die Behandlung von Punktladungen oder Massebelegungen von Flächen. Was ist zum Beispiel die für Punktladungen relevante „Delta-Funktion“?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x) \, dx = f(0)$$

Dazu brauchen wir einen neuen Begriff.

### 20.1 Der Begriff der Distribution

Zur heuristischen Motivation: Betrachte  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$ . Wenn  $f$  und  $\varphi$  beide „hinreichend gut“ sind, dann existiert dieses Integral. Wenn man  $f$  „verschlechtert“, muss man  $\varphi$  „verbessern“, damit das Integral noch existiert. Im besten Falle ist  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , d.h.  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $\text{supp } \varphi := \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$  ist kompakt, d.h. die Funktion  $\varphi$  ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger. Solche  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  heißen **Grundfunktion** oder **Testfunktion**.

Sei  $f$  so, dass

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

existiert.  $T_f$  ist eine *lineare Abbildung* von  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  nach  $\mathbb{R}$ .  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  ist offenbar ein Vektorraum, also ist  $T_f$  ein *lineares Funktional* auf  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Für differenzierbare  $f$  folgt mit partieller Integration:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \cdot \varphi(x) \, dx = [f(x) \cdot \varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi'(x) \, dx$$

Wenn  $f$  nicht differenzierbar ist, kann man durch obige Gleichung eine verallgemeinerte Ableitung definieren. Bevor wir nun mit den eigentlichen Definitionen beginnen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

- $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist ein Punkt.
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ist ein **Multiindex** mit  $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$  und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

- Bereits bekannt sind  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  und  $D_i^k = \frac{\partial^k}{\partial x_i^k}$ , neu ist  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$
- Multiindizes addiert man komponentenweise:  $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ , es ist  $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ .

Wir betrachten den  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Ein typisches Beispiel einer Funktion aus diesem Raum ist der „Hut“

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} C_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}} & \|x\| < \varepsilon \\ 0 & \|x\| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Hierbei ist  $C_\varepsilon$  so, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$  ist. Das folgende Lemma sichert die Existenz hinreichend vieler nützlicher Testfunktionen.

### Lemma 20.1

Zu jedem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit den Eigenschaften:

- $0 \leq g \leq 1$
- $g(x \in G_\varepsilon) = 1$  und  $g(x \notin G_{3\varepsilon}) = 0$

Hierbei ist  $G_\delta = \bigcup_{x \in G} K_\delta(x)$  (die Vereinigung der offenen Kugeln um die Punkte in  $G$  mit dem Radius  $\delta$ ) eine  $\delta$ -**Umgebung von  $G$** .

### Beweis

Mit der charakteristischen Funktion  $\chi$  von  $G_{2\varepsilon}$  konstruiert man  $g$ :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) \cdot f_\varepsilon(x - y) dy$$

Hierbei handelt es sich um eine Faltung:  $g = \chi * f_\varepsilon$  (dazu später mehr). ■

Der entscheidende Punkt ist nun die Konvergenz in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

### Definition 20.2

Unter dem **Schwartz-Raum**  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  versteht man den Vektorraum  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , versehen mit folgendem Konvergenzbegriff: Eine Folge  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  genau dann, wenn gilt:

1. Es existiert eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp } \varphi_n \subset K \forall n$ .
2. Für alle  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  gilt:  $D^\alpha \varphi_n \Rightarrow D^\alpha \varphi$  (gleichmäßige Konvergenz in  $K$ ).

Analog definiert man für eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  den Raum  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

### Bemerkung

1. Diese Konvergenz ist insofern kompliziert, als dass es keine Metrik in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gibt, die diese Konvergenz erzeugt.
2. Diese Konvergenz hat besonders gute Eigenschaften: Die Vektorraumoperationen sind bezüglich dieser Konvergenz stetig, d.h. wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  und  $\psi_n \rightarrow \psi$  in  $\mathcal{D}$  und  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  in  $\mathbb{R}$ , dann konvergieren auch  $\varphi_n + \psi_n \rightarrow \varphi + \psi$  und  $\lambda_n \cdot \varphi_n \rightarrow \lambda \cdot \varphi$ .
3.  $D^\alpha$  ist eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{D}$  in sich, d.h. wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , dann  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ .

4. Wenn  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $M_f$  gegeben durch

$$(M_f\varphi)(x) := f(x) \cdot \varphi(x)$$

eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{D}$  in sich.

5.  $\mathcal{D}$  ist vollständig.

### Definition 20.3

Unter einer **Distribution** oder **verallgemeinerten Funktion** versteht man ein stetiges lineares Funktional  $T$  auf  $\mathcal{D}$ . Die Menge aller Distributionen auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  heißt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  oder kurz  $\mathcal{D}'$ .

Dass  $T$  stetig ist, heißt, dass für eine Folge  $(\varphi_n)$  mit  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  (in  $\mathcal{D}$ ) gilt:  $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$  (in  $\mathbb{R}^n$ ). Wendet man  $T$  auf  $\varphi$  an, so schreibt man gleichwertig:  $T(\varphi)$ ,  $T\varphi$  oder  $(T, \varphi)$ .

### Beispiel 20.1

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Dies ist die Menge aller **lokal integrierbaren Funktionen**, d.h.  $\int_B |f(x)| \, dx < \infty$  für alle kompakten  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $T_f$  mit  $T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$  aus  $\mathcal{D}'$ .

Die Linearität zu beweisen, ist trivial. Bei der Stetigkeit genügt es, zu zeigen, dass aus  $\varphi_n \rightarrow 0$  (in  $\mathcal{D}$ ) folgt, dass  $T_f(\varphi_n) \rightarrow 0$  (in  $\mathbb{R}^n$ ) konvergiert. Dann gilt ähnliches auch im Allgemeinen: Aus  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  folgt  $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ , damit  $T_f(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ , wegen Linearität gilt auch  $T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi) \rightarrow 0$  und endlich  $T_f(\varphi_n) \rightarrow T_f(\varphi)$ .

$\varphi_n \rightarrow 0$  bedeutet unter anderem, dass eine kompakte Menge  $K$  mit  $\text{supp } \varphi_n \subset K \, \forall n$  existiert und  $\varphi_n$  auf  $K$  gleichmäßig konvergiert. Dies heißt wiederum, dass  $\sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$  geht.

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi_n(x) \, dx \right| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi_n(x)| \, dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \cdot \int_K |f(x)| \, dx$$

Distributionen, die sich auf diese Weise durch eine Funktion darstellen lassen, heißen **regulär** oder **vom Typ einer Funktion**, andernfalls **singulär**. Statt  $T_f$  kann man auch  $\{f\}$  schreiben.

### Beispiel 20.2

#### Dirac'sche $\delta$ -Distribution

$\delta_a$  wird gegeben durch  $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$ . Mit  $\delta$  wird  $\delta_0$  gemeint, also ist  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ .

Auch hier ist die Linearität einfach zu zeigen. Zur Stetigkeit: Gehe  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ , d.h.  $\text{supp } \varphi_n \subset K$  für alle  $n$  mit einem festen kompakten  $K$ . Dann konvergiert  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  gleichmäßig in  $K$ , also auch insbesondere  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  gleichmäßig in  $K$ . Damit konvergiert erst recht  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  in  $K$ , und es ist auch  $\varphi_n(x) \rightarrow 0 = \varphi(x)$  außerhalb von  $K$ . Also konvergiert  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  für alle  $x$ , insb. auch für  $x = a$ . Somit ist  $\delta(\varphi_n) \rightarrow \delta(\varphi)$ .

Es gibt keine lokal integrierbare Funktion  $f$  mit  $T_f = \delta$  bzw.  $\int_B f(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

### Beispiel 20.3

Maße sind auch Distributionen (wenn sie noch gewisse zusätzliche Eigenschaften haben).

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

Diese Schreibweise hat einen wohlbestimmten Sinn. Sehr häufig braucht man die folgende *symbolische* Schreibweise, auch wenn es gar keine lokal integrierbare Funktion  $T(x)$  mit dieser Eigenschaft gibt:

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

Insbesondere sind so bei der Delta-Distribution Schreibweisen wie  $\delta(x)$  oder  $\delta(x - x_0)$  üblich:

$$\delta(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$$

## 20.2 Rechenoperationen mit Distributionen

1.  $\mathcal{D}$  ist ein Vektorraum.
2. Distributionen kann man im Allgemeinen nicht multiplizieren, aber: Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann kann man sinnvoll definieren, was  $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sein soll:

$$(f \cdot T)(\varphi) := T(f \cdot \varphi)$$

3. Neben der bereits bekannten Konvergenz in  $\mathcal{D}$  wird für Distributionen eine **schwache Konvergenz** definiert:  $T_n \rightarrow T$  gilt genau dann, wenn  $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt. Bezüglich dieser Konvergenz ist  $\mathcal{D}'$  vollständig.

Man kann  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}'$  einbetten durch  $\varphi \rightarrow T_\varphi$  mit  $T_\varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot \psi(x) dx$ . Dann liegt  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}'$  dicht: Zu jedem  $T \in \mathcal{D}'$  existiert eine Folge  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}$  mit  $T_{\varphi_n} \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'$ .

### 20.2.1 Ableitung von Distributionen

Sei  $T \in \mathcal{D}'$ . Dann wird  $S := D^\alpha T$  definiert durch

$$S(\varphi) = (D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \cdot T(D^\alpha \varphi)$$

Beachte, dass  $D^\alpha T$  ein Symbol ist, während  $D^\alpha \varphi$  wohldefiniert ist.  $S$  ist wieder eine Distribution und heißt **schwache Ableitung** (bzw. **Ableitung im distributionellen Sinne**) der Ordnung  $\alpha$  von  $T$ . Dass  $S \in \mathcal{D}'$  liegt, sieht man so: Natürlich ist  $S$  ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}$ . Sei  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ . Zu zeigen ist:  $S(\varphi_n) \rightarrow S(\varphi)$ . Wir wissen, dass  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  in  $\mathcal{D}$  konvergiert (da die Abbildung  $D^\alpha$  stetig ist). Auch  $T$  ist stetig, also konvergiert  $T(D^\alpha \varphi_n) \rightarrow T(D^\alpha \varphi)$  in  $\mathbb{R}$ . Daraus folgt die Behauptung.

Die Ableitung hat folgende Eigenschaften:

1. Jedes  $T \in \mathcal{D}'$  ist beliebig oft differenzierbar.
2.  $D^\alpha(D^\beta T) = D^{\alpha+\beta} T = D^\beta(D^\alpha T)$
3. Für  $f \in C^\infty$  und  $T \in \mathcal{D}'$  gilt die **Leibnizsche Produktregel**:

$$D^\gamma(fT) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha! \cdot \beta!} \cdot D^\alpha f \cdot D^\beta T$$

#### Beispiel 20.4 Ableitung der Heaviside-Funktion

Wir betrachten die Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Gesucht ist  $\Theta'$  im distributionellen Sinne:

$$\Theta'(\varphi) = -\Theta(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = - \varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Beachte, dass  $\varphi(x \rightarrow \infty)$  verschwinden muss, da  $\varphi$  lokal integrierbar ist. Damit ist  $\Theta' = \delta$ .

**Beispiel 20.5** Zur Dichtheit

Benutzt man die Dichtheit von  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{D}'$ , dann kann man viele Beispiele von Folgen  $(\varphi_n)$  aus  $\mathcal{D}$  angeben, die im schwachen Sinne gegen  $\delta$  konvergieren. Auch außerhalb von  $\mathcal{D}$  gibt es Beispiele:

- Die Funktionen  $f_n$  mit  $f_n(x) = \frac{n}{2} \cdot e^{-|x|/n}$  sind aus  $L^1_{loc}$ , aber nicht aus  $\mathcal{D}$ , da sie keinen kompakten Träger haben. Es konvergiert  $T_{f_n} \rightarrow \delta$  in  $\mathcal{D}'$ .
- Die Funktionen  $g_n$  mit  $g_n(x) = n$  für  $x \leq \frac{1}{2n}$  und  $g_n(x) = 0$  sonst haben zwar einen kompakten Träger, sind aber nicht differenzierbar und somit auch nicht aus  $\mathcal{D}$ . Sie konvergieren nicht gegen  $\delta$ .

**20.2.2 Direktes Produkt von Distributionen**

Die Physik verwendet Ausdrücke wie  $\delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$ . Wie kann man dies formalisieren? Seien  $f$  und  $g$  lokal integrierbare Funktionen sowie  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Hiermit kann man  $\varrho$  mit  $\varrho(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$  definieren, sprich  $\varrho = \varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ .

Definiere nun die folgende Distribution:

$$\begin{aligned} S(\varphi, \psi) &:= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \cdot \varrho(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \cdot \varphi(x)\psi(y) \, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot \psi(y) \, dy \\ &= T_f(\varphi) \cdot T_g(\psi) \end{aligned}$$

Man schreibt  $S := T_f \otimes T_g$ . Offenbar ist  $S$  auch auf allen Funktionen  $\chi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i$  (mit  $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{D}$  und  $n \in \mathbb{N}$ ) wohldefiniert:

$$S\chi = \sum_i T_f(\varphi_i) \cdot T_g(\psi_i)$$

Die Menge aller solchen  $\chi$  liegt in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  dicht. Obiges  $S$  ist dann auf ganz  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  fortsetzbar, indem man definiert:

$$S\eta = (T_f \otimes T_g)\eta := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \cdot \eta(x, y) \, dx dy \quad \text{für } \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

Das Produkt  $S = T_f \otimes T_g$  heißt **direktes Produkt** oder **Tensorprodukt** der Distributionen  $T_f$  und  $T_g$ . Allgemeiner seien  $S_x, T_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$  (die Indizes geben die Variable an, auf die sich die Distribution unten bezieht) und  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $S_x \otimes T_y$  wie folgt erklärt:

$$(S_x \otimes T_y)\eta := S_x(T_y\eta(x, y))$$

Genauer: Für jedes feste  $x$  ist die Funktion  $\eta(x, \cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann ist  $T_y$  anwendbar und es entsteht eine Funktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) := T_y\eta(x, \cdot)$$

Dieses  $\varphi$  liegt in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , somit hat  $(S_x \otimes T_y)\eta = S_x\varphi$  Sinn.

**Beispiel 20.6** Direktes Produkt von Delta-Distributionen

Es ist  $(\delta \otimes \delta)\eta = \eta(0, 0)$ , denn:

$$\delta(\eta(x, \cdot)) = \eta(x, 0) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad (\delta \otimes \delta)\eta = \delta\varphi = \eta(0, 0)$$



### 20.2.3 Faltung von Funktionen und Distributionen

Seien  $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ , also  $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$  und  $\int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx < \infty$ . Die Faltung ist wie folgt erklärt:

$$f(x) := (g * h)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot h(x - y) dy$$

Analog geht die Definition für  $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Auch  $f$  liegt in diesem Raum. Die Faltung wirkt in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  wie eine Multiplikation. Man kann  $T_f$  bilden:

$$\begin{aligned} T_f \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} (g * h)(z) \cdot \varphi(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot h(z - y) dy \right] \cdot \varphi(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}^n} h(z - y) \cdot \varphi(z) dz \right] dy \\ (x := z - y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot \varphi(x + y) dx dy \end{aligned}$$

Wir haben insgesamt

$$(g * h)(\varphi) := T_{g*h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} g(x) \cdot h(y) \cdot \varphi(x + y) dx dy \quad (20.2)$$

#### Bemerkung

Die Faltung von Funktionen ist eine Art Glättungs- bzw. Mittelungsprozess (vgl. Lemma 20.1).

Die Formel (20.2) suggeriert folgende Definition für die Faltung zweier Distributionen  $S_y$  und  $T_x$ :

$$(S_y * T_x)(\varphi) = S_y(T_x(\varphi(x + y)))$$

Das geht nicht, denn  $\tilde{\varphi}$  mit  $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x + y)$  ist keine Funktion mit kompaktem Träger: Ist zum Beispiel  $\varphi(0) \neq 0$ , so ist  $\tilde{\varphi}(x, -x) \neq 0$  für alle  $x$ .

Für beliebige  $S$  und  $T$  ist die Faltung nicht sinnvoll definierbar. Als Einschränkung benötigen wir den Begriff des Trägers für eine Distribution: Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man sagt,  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  **verschwindet** in  $G$ , wenn gilt:  $T(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi$  mit  $\text{supp } \varphi \subset G$ . Sei nun  $G_0$  die Vereinigung aller offenen  $G$ , in denen  $T$  verschwindet. (Dann ist  $G_0$  die größte offene Menge, in der  $G$  verschwindet.) Dann wird der **Träger** der Distribution  $T$  definiert durch

$$\text{supp } T := \mathbb{R}^n \setminus G$$

#### Lemma 20.4 Lemma von du Bois und Reymond

Eine lokal integrierbare Funktion  $f$  verschwindet in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  im distributionellen Sinne (d.h.  $T_f$  verschwindet in  $G$ ) genau dann, wenn  $f$  in  $G$  fast überall verschwindet.

Eine Distribution  $T$  heißt **finit**, wenn der Träger  $\text{supp } T$  kompakt ist.

#### Beispiel 20.7

$\delta$  und  $\delta_a$  sind finit, denn  $\text{supp } \delta = \{0\}$  bzw.  $\text{supp } \delta_a = \{a\}$ .

**Definition und Satz 20.5**

Sei  $S_x$  eine beliebige und  $T_y$  eine finite Distribution. Dann existiert die Faltung  $S_x * T_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}')$  und ist gegeben durch:

$$(S_x * T_y)\varphi := S_x \left[ T_y[\eta(y) \cdot \varphi(x+y)] \right] \quad \text{mit} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (20.3)$$

$\eta$  ist eine beliebige Funktion aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , die in einer Umgebung des Trägers von  $T$  identisch Eins ist.

**Bemerkung**

Man sieht, dass  $\eta T = T$  ist. Wie wirkt  $\eta T$ ? Es ist  $(\eta T)\psi = T(\eta\psi)$ . Der Sinn von  $\eta$  in (20.3) besteht darin, dass  $\eta(y) \cdot \varphi(x+y)$  als Funktion von  $y$  wieder in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  liegt.

Die Faltung hat folgende Eigenschaften:

1. Die Faltung ist kommutativ. (Das sieht man erst, wenn man die Faltung mittels direktem Produkt der Distributionen definiert.)
2. Für beliebiges  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  ist  $\delta * T = T * \delta = T$ , also ist  $\delta$  das neutrale Element der Faltung:

$$(T * \delta)(\varphi) = T \left[ \delta[\eta(y) \cdot \varphi(x+y)] \right] = T[\eta(0) \cdot \varphi(x+0)] = T[\varphi(x)] = T(\varphi)$$

3. Zum Zusammenspiel von Faltung und Ableitung: Es gilt

$$D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T = S * (D^\alpha T)$$

Das heißt insbesondere, dass, wenn  $S * T$  wohldefiniert ist, auch alle drei Terme in obiger Gleichung erklärt sind. Wir setzen also voraus, dass etwa  $T$  einen kompakten Träger hat. Es genügt, diese Beziehung für eine partielle Ableitung erster Ordnung zu zeigen:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (S * T) \right] \varphi &= -(S * T) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\ &\stackrel{(20.3)}{=} -S \left[ T \left[ \eta(y) \cdot \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right] \right] = -S \left[ T \frac{\partial \eta(y) \cdot \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} -S \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ T \left( \eta(y) \cdot \varphi(x+y) \right) \right] \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} S \left[ T \left( \eta(y) \cdot \varphi(x+y) \right) \right] \\ &= \left( \frac{\partial S}{\partial x_j} * T \right) \varphi \end{aligned}$$

(\*) gilt für den Fall, dass  $T = T_f$  von einer Funktion  $f(y)$  erzeugt wird:

$$T \left( \frac{\partial \eta(y) \cdot \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right) = \int f(y) \cdot \frac{\partial \eta(y) \cdot \varphi(x+y)}{\partial x_j} dy = \frac{\partial}{\partial x_j} \int f(y) \cdot \eta(y) \cdot \varphi(x+y) dy$$

Ein Spezialfall ist  $D^\alpha T = D^\alpha(T * \delta) = T * D^\alpha \delta$ . Ebenso ist  $D^\alpha T = \delta * D^\alpha T$ .

**20.3 Anwendung auf Differentialgleichungen**

$$L(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \cdot D^\alpha \quad \text{mit} \quad L(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \cdot D^\alpha \varphi$$

sei ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $m$  mit Koeffizienten  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , zum Beispiel der Laplace-Operator im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{|\alpha|=0}^2 D^\alpha,$$

wobei nur  $\alpha$  von der Form  $\alpha^i = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$  betrachtet werden. Dann hat man:  $a_{\alpha^i} \equiv 1$  für die  $\alpha^i$  und sonst  $a_{\alpha} \equiv 0$ .

Sei  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

$$(L(x, D)T, \varphi) = (T, L^*(x, D)\varphi) \quad \text{mit} \quad L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}\varphi)$$

$L^*(x, D)$  nennt man den zu  $L(x, D)$  **formal adjungierten Differentialoperator**. Wie kommt man auf  $L^*$ ? Es genügt einen Summanden zu betrachten. Nach Definition der Multiplikation einer Distribution mit einer  $C^{\infty}$ -Funktion (hier  $a_{\alpha}$ ) ist

$$(a_{\alpha}(x) \cdot (D^{\alpha}T), \varphi) = (D^{\alpha}T)(a_{\alpha} \cdot \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \cdot T(D^{\alpha}(a_{\alpha} \cdot \varphi)) = T((-1)^{|\alpha|} \cdot D^{\alpha}(a_{\alpha} \cdot \varphi))$$

### Definition 20.6

Unter einer **schwachen** (oder **verallgemeinerten**) **Lösung** der Differentialgleichung

$$L(x, D)u = S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (20.4)$$

in  $G$  versteht man jede Distribution  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  mit folgender Eigenschaft:

$$(L(x, D)T)\varphi = S(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \text{supp } \varphi \subset G$$

Das heißt, es gilt:

$$T(L^*(x, D)\varphi) = S(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \text{supp } \varphi \subset G$$

Wenn speziell  $G = \mathbb{R}^n$  ist, dann sollen obige Gleichungen für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gelten.

Man überzeugt sich relativ leicht von folgender Behauptung: Wenn es eine sogenannte klassische Lösung von (20.4) gibt, d.h. es existiert ein  $u \in C^{\infty}(G)$  mit  $L(x, D)u = S$ , dann ist  $S$  automatisch eine stetige Funktion. Identifiziert man dann  $u$  und  $T_u$ , dann ist diese klassische Lösung auch eine schwache Lösung. (Dann ist automatisch  $S$  durch eine stetige Funktion gegeben.)

### Lemma 20.7

Sei  $u$  eine verallgemeinerte Lösung von (20.4), sodass  $u$  eine reguläre Distribution ist, und  $u$  soll zu  $C^m(G)$  gehören.  $S$  möge zu  $C(G)$  gehören, und  $T_u$  erfülle also (20.4) im distributionellen Sinne. Dann ist dieses  $u$  zugleich eine klassische Lösung, d.h. die Gleichung (20.4) ist punktweise in  $G$  erfüllt.

#### Bemerkung

Die Betrachtungen vor dem Lemma besagen: Wenn  $u \in C^m(G)$  liegt,  $S = f$  eine stetige Funktion ist und  $u$  eine klassische Lösung ist, d.h. es gilt  $L(x, D)u(x) = f(x)$  für alle  $x \in G$ , dann gilt auch im distributionellen Sinne:  $L(x, D)T_u = T_f$ . Das Lemma besagt: Wenn  $u$  und  $f$  wie oben mit  $L(x, D)T_u = T_f$ , dann gilt auch punktweise  $L(x, D)u(x) = f(x)$  in  $G$ .

### Beweis

Betrachte die in  $G$  definierte stetige Funktion  $L(x, D)u - S$ . Die davon erzeugte Distribution hat folgende Eigenschaft: Wenn  $\text{supp } \varphi \subset G$ , dann ist  $T(\varphi) = 0$ , denn  $(L(x, D)u)(\varphi) = S(\varphi)$ . Wegen des Lemmas von du Bois und Reymond muss diese stetige Funktion  $L(x, D)u - S$  in  $G$  verschwinden, also gilt punktweise  $L(x, D)u(x) = S(x)$ . ■

**Definition 20.8**

Sei  $L(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot D^{\alpha}$  ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_{\alpha}$ . Unter einer **Grund-** oder **Fundamentallösung** von  $L(D)$  versteht man eine Distribution  $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  mit  $L(D)T = \delta$ .

Manchmal definiert man etwas allgemeiner:  $T$  heißt Grundlösung an der Stelle  $a \in \mathbb{R}^n$  (oder mit der Polstelle  $a$ ), wenn  $L(D)T = \delta_a$  ist.

**Bemerkung**

Grundlösungen sind nicht eindeutig bestimmt, denn wenn  $u$  die Gleichung  $L(D)u = 0$  erfüllt, dann ist natürlich auch  $T + u$  eine Grundlösung.

**Satz 20.9** Bedeutung der Grundlösungen

Wenn  $T$  eine Grundlösung zu  $L(D)$  und  $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$  ist, sodass  $R = T * S$  existiert, dann ist dieses  $R$  eine Lösung der Differentialgleichung  $L(D)u = S$ .

**Beweis**

Aufgrund der Rechenregeln für Ableitungen der Faltung gilt:

$$L(D)R = L(D)(T * S) = [L(D)T] * S = \delta * S = S$$

■

**20.3.1 Beispiel für eine schwache Lösung**

Sei  $f \in C(\mathbb{R})$ , dann ist  $u(x, t) = 1/2 \cdot [f(x + at) - f(x - at)]$  auf dem gesamten  $\mathbb{R}^2$  eine schwache Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} \text{Differentialgleichung:} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{Anfangsbedingungen:} \quad & u(x, 0) = f(x) \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Beachte:  $f$  (und somit  $u$ ) ist im Allgemeinen nur stetig, nicht differenzierbar. Somit kann  $u$  keine starke Lösung sein.

**Beweis**

O.E.d.A. ist  $a = 1$ , also  $Lu = u_{xx} - u_{tt}$  und  $L = L^*$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  beliebig fest, und  $r$  so, dass

$$\text{supp } \varphi \subset Q_1 = (-r, r) \times (-r, r).$$

Wir führen sogenannte charakteristische Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  ein. Die Koordinatentransformation ist:

$$h : \mathbb{R}_{\xi, \eta}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{x, t}^2 \quad \text{mit} \quad h(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \xi + \eta \\ \xi - \eta \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \xi = x + t \\ \eta = x - t \end{cases}$$

Für die Transformation  $h$  gilt  $|\det h'| = 1/2$ . Es ist nun  $u(\xi, \eta) = 1/2 \cdot [f(\xi) + f(\eta)]$ . Man erhält:

$$h^{-1}(Q_1) \subset Q_2 = (-2r, 2r) \times (-2r, 2r)$$

Die Verkettung  $\psi := \varphi \circ h$  ist unendlich oft differenzierbar und  $\text{supp } \varphi \subset Q_2$ . Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi = \frac{1}{4} (L\phi) \circ h$$

Zum Beweis verwendet man die Kettenregel:

$$\begin{aligned}\psi(\xi, \eta) &= \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot (\xi + \eta), \frac{1}{2} \cdot (\xi - \eta)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \psi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi &= \frac{1}{4} (L\phi) \circ h\end{aligned}$$

Jetzt wird die Gleichung für den Nachweis schwacher Lösungen gezeigt: Beachte  $L = L^*$ .

$$(Lu)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} Lu \cdot \varphi \, dx dt = \int_{\mathbb{R}^2} u \cdot L\varphi \, dx dt$$

Nach der Transformationsformel für Integralanwendungen gilt:

$$\begin{aligned}(Lu)(\varphi) &= \int_{Q_2} [f(\xi) + f(\eta)] \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \psi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \\ (Lu)(\varphi) &= \int_{-2r}^{2r} f(\xi) \cdot \left[ \int_{-2r}^{2r} \frac{\partial^2}{\partial \psi} \xi \partial \eta \, d\eta \right] d\xi + \int_{-2r}^{2r} f(\eta) \cdot \left[ \int_{-2r}^{2r} \frac{\partial^2}{\partial \psi} \xi \partial \eta \, d\xi \right] d\eta\end{aligned}$$

Die Klammerausdrücke verschwinden, da die Stammfunktionen  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$  und  $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$  auf den Integrationsgrenzen verschwinden, denn ihr abgeschlossener Träger liegt zwischen den Grenzen der offenen Menge  $Q_2$ . ■

## Wichtige Grundlösungen

**Satz 20.10** Satz von Malgrange-Ehrenpreis

Jeder lineare Differentialoperator  $L(D)$  mit konstanten Koeffizienten besitzt eine **Grundlösung**, also eine Distribution  $T \in \mathcal{D}'$  mit  $L(D)T = \delta$ .

Wir betrachten im  $\mathbb{R}$  den gewöhnlichen Differentialoperator:

$$L = L\left(D = \frac{d}{dx}\right) = \sum_{k=0}^m a_k \cdot \frac{\partial^k}{\partial x^k}$$

mit  $a_k \in \mathbb{R}$  und  $a_m = 1$ .

**Satz 20.11**

Man erhält eine Grundlösung für  $L$ , indem man zuerst das Anfangswertproblem

$$Lu = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = \dots = u^{(m-2)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad u^{(m-1)}(0) = 1$$

löst. Dann ist  $T = T_f$  eine Grundlösung, wenn  $f$  gegeben ist durch

$$f(x) = u(x) \cdot \Theta(x) = \begin{cases} u(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**Beweis**

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Es ist  $T_f = u \cdot T_\Theta$ , denn:

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \Theta(x) \cdot \varphi(x) \, dx = T_\Theta(u \cdot \varphi) = u \cdot T_\Theta(\varphi)$$

Wir wissen, dass  $T'_\Theta = \delta$  ist. Außerdem ist (im distributionellen Sinne)  $u \cdot \delta = u(0) \cdot \delta$ , denn:

$$(u \cdot \delta)(\varphi) = \delta(u \cdot \varphi) = u(0) \cdot \varphi(0) = u(0) \cdot \delta(\varphi)$$

Jetzt müssen (im distributionellen Sinne) die Ableitungen von  $T_f$  bis zur  $m$ . Ordnung bestimmt werden. Unter Beachtung der Leibnizschen Produktregel (siehe Ableitung von Distributionen) gilt:

$$T'_f = (u \cdot T_0)' = u' \cdot T_0 + u \cdot T'_0 = u' \cdot T_0 + u \cdot \delta = u' \cdot T_0 + \underbrace{u(0)}_{=0} \cdot \delta = u' \cdot T_0$$

Für weitere Ableitungen folgt unter Beachtung der Anfangswertaufgabe analog:

$$\begin{aligned} T_f^{(k)} &= u^{(k)} \cdot T_0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m-1 \\ T_f^{(m)} &= u^{(m)} \cdot T_0 + \delta \end{aligned}$$

Beachte nun  $Lu = 0$  und  $a_m = 1$ :

$$LT_f = {}^L u \cdot T_\Theta + \delta = \delta$$

■

Bei den partiellen Differentialoperatoren sollen (ohne Beweis) Grundlösungen für die wichtigsten Operatoren angegeben werden.

1. Der **Laplace-Operator**  $\Delta_n u = \delta$  hat im  $\mathbb{R}^n$  die Grundlösung  $T_n$  mit

$$T_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \log \|x\| \quad T_3(x) = -\frac{1}{4\pi \cdot \|x\|} \quad T_n(x) = -\frac{1}{(n-2) \cdot \sigma_n \cdot \|x\|^{n-2}} \quad \text{für } n \geq 3$$

Hierbei ist  $\|x\|$  die euklidische Norm und  $\sigma_n$  der Oberflächeninhalt der Einheitskugel im jeweiligen  $\mathbb{R}^n$ . Der Beweis erfolgt die Berechnung uneigentlicher Integrale (aufgrund der Singularitäten von  $T_n$  als Funktion an  $x = 0$ ).

2. Der **Wärmeleitungsoperator**  $(\partial/\partial t - a^2 \cdot \Delta_n)u = \delta$  hat die Fundamentallösung  $T = T_f$  mit

$$f(x, t) = \frac{\Theta(t)}{(2a \cdot \sqrt{\pi \cdot t})^n} \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 \cdot t}}$$

3. Beim **Wellenoperator**  $(\partial^2/\partial t^2 - a^2 \cdot \Delta_n)u = \delta$  sind die ersten Grundlösungen:

$$T_1(x, t) = \frac{1}{2} \cdot \Theta(at - |x|) \quad T_2(x, t) = \frac{\Theta(at - \|x\|)}{2\pi a \cdot \sqrt{a^2 t^2 - \|x\|^2}} \quad T_3(x, t) = \frac{\Theta(t)}{2\pi a} \cdot \delta(a^2 t^2 - \|x\|^2)$$

Es ist  $S_{at} = \{x : \|x\|^2 = a^2 t^2\}$ . Dann soll  $\delta(a^2 t^2 - \|x\|^2) = \delta_{S_{at}}$  sein und so wirken: Wenn  $\varphi$  gegeben ist mit  $\text{supp } \varphi \cap S_{at} = \emptyset$ , dann ist  $(\delta_{S_{at}}, \varphi) = 0$ . Ansonsten ist  $(\delta_{S_{at}}, \varphi) = \int_{S_{at}} \varphi \, dS$ , wobei  $dS$  das Flächenelement von  $S_{at}$  ist.

## 20.4 Bemerkungen zur Fouriertransformation

Die Räume  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  sind in gewisser Hinsicht für die Fouriertransformation ungeeignet. Zur Erinnerung: Ist  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  ein Multiindex, so ist für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  definiert:

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$$

### Definition und Satz 20.12

Seien  $\alpha, \beta$  beliebige Multiindizes. Der **Schwartzraum**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist der folgende Vektorraum:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \cdot D^\alpha f(x)| < \infty \forall \alpha, \beta \right\} \quad (20.5)$$

Die Elemente von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  heißen **schnell fallende Funktionen**.

Zu beweisen ist, dass  $\mathcal{S}$  ein Vektorraum ist.

### Beispiel 20.8 Einige schnell fallende Funktionen

1.  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (Zum Beweis muss man zeigen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind.)
2.  $e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  – Zudem ist für ein Polynom  $p$  von  $x = (x_1, \dots, x_n)$  die Funktion  $e^{-\|x\|^2} \cdot p(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Für Anwendungen ist es nützlich, äquivalente Charakterisierungen von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zu haben. Es gilt:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| \leq k} (1 + \|x\|^2)^k \cdot |D^\alpha f(x)| < \infty \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (20.6)$$

Die  $\|\cdot\|_k$  sind Normen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . In diesem Raum werden also abzählbar viele Normen betrachtet. Die Charakterisierung (20.6) führt zu einem Kriterium für die Zugehörigkeit von  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  zu  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\forall \beta, m \in \mathbb{N} : \exists C > 0 : \left| D^\beta f(x) \right| \leq \frac{C}{(1 + \|x\|^2)^m} \quad (*)$$

**Beweis** der Äquivalenz von (\*) und der Bedingung in (20.6)

Aus (\*) folgt relativ einfach (20.6). Gelte umgekehrt (20.6).  $\beta$  mit  $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n =: l$  und  $m$  seien gegeben. (Wir betrachten  $l < m$ , der andere Fall verläuft analog.) Nach (20.6) gilt für  $k = m$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| \leq m} (1 + \|x\|^2)^m \cdot |D^\alpha f(x)| =: C < \infty$$

Insbesondere gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und obiges  $\beta$ :

$$(1 + \|x\|^2)^m \cdot |D^\beta f(x)| \leq C$$

Entsprechend beider Charakterisierungen des Raumes wird die Konvergenz in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  wie folgt erklärt:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} f \Leftrightarrow x^\beta \cdot D^\alpha f_n(x) \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{\mathbb{R}^n} x^\beta \cdot D^\alpha f(x) \quad \forall \alpha, \beta$$

Das ist genau dann der Fall, wenn  $\|f_n - f\|_k \rightarrow 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  konvergiert. Die folgenden Operationen sind in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetig:

1. die Ableitung ( $f \mapsto D^\alpha f$  für beliebiges  $\alpha$ ) – Das heißt, dass, wenn  $f_n$  gegen  $f$  konvergiert, dann auch  $D^\alpha f_n \rightarrow D^\alpha f$  (beides in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ). Dafür muss man zeigen, dass für alle  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auch  $D^\alpha g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  liegt.
2. die Multiplikation mit einem beliebigen Polynom  $p$  von  $x$  ( $f \mapsto p \cdot f$ )

Ein wichtiger Unterschied zwischen  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  liegt in der Multiplikation mit Funktionen. Während man ein  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit einer beliebigen Funktion  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  multiplizieren kann, ohne  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  zu verlassen, gilt das für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nicht mehr unbedingt. Zum Beispiel kann man mit  $\exp(\|x\|^2)$  im Allgemeinen nicht multiplizieren, ohne  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zu verlassen. (Es gibt auch Ausnahmen, etwa ist  $\exp(-\|x\|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\exp(\|x\|^2) \cdot \exp(-\|x\|^2) = 1 \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .)

Mit welchen Funktionen kann man immer multiplizieren? Sei der Raum der **polynombeschränkten Funktionen** definiert durch

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \beta \exists m \in \mathbb{N}, C > 0 : \left| D^\beta \cdot f(x) \right| \leq C \cdot (1 + \|x\|^2)^m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Ein typisches Beispiel für ein  $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  ist (für  $p \in \mathbb{R}^n$  und ein beliebiges Polynom  $q$ )

$$f(x) = e^{i \cdot \langle p, x \rangle} \cdot q(x)$$

$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  ist ein Vektorraum und heißt **Raum der Multiplikatoren** für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Zur Rechtfertigung dieses Begriffes muss man zeigen, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  enthalten ist und für  $g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  das Produkt  $g \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  liegt.

Das folgende Lemma benötigen wir bei der Fouriertransformation:

### Lemma 20.13

Sei  $j \in \{1, \dots, m\}$  (und  $D_j = \partial/\partial x_j$ ).

1. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\int_{\mathbb{R}^n} D_j f(x) \, dx = 0$ .
2. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [D_j f(x)] \cdot g(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot [D_j g(x)] \, dx$$

### Beweis

Den Beweis zu Teil 1 schreiben wir (in Bezug auf uneigentliche Integrale) etwas verkürzt und betrachten der Einfachheit halber nur (o.E.d.A.)  $n = 2$  und  $j = 1$ .

$$\int_{\mathbb{R}^2} D_1 f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left[ \int_{-R}^R D_1 (f(x_1, x_2)) \, dx_1 \right] dx_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R [f(R, x_2) - f(-R, x_2)] \, dx_2$$

Benutze die Charakterisierung (\*) der Funktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  für den Spezialfall  $\beta = (0, \dots, 0)$  (das ist ein Standardtrick) und  $m = 2$ . Es existiert ein  $C > 0$  mit

$$|f(\pm R, x_2)| \leq \frac{C}{(1 + R^2 + x_2^2)^2} \leq \frac{1}{R^2} \cdot \frac{C}{1 + x_2^2} \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{-R}^R [f(R, x_2) - f(-R, x_2)] \, dx_2 \right| \leq \frac{2C}{R^2} \cdot \int_{-R}^R \frac{dx_2}{1 + x_2^2}$$

Da das Integral konvergiert, folgt für  $R \rightarrow \infty$ :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} D_1 f(x) \, dx \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2C}{R^2} \cdot \int_{-R}^R \frac{dx_2}{1 + x_2^2} = 0$$



Die zweite Aussage folgt aus der damit bewiesenen ersten, denn natürlich sind  $f \cdot g$ ,  $(D_j f) \cdot g$ ,  $f \cdot (D_j g)$  und  $D_j(f \cdot g)$  alle aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mit der Produktregel gilt:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} D_j(f \cdot g)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f)(x) \cdot g(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (D_j g)(x) \, dx$$

### Definition 20.14

Die auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetigen linearen Funktionale  $T$  heißen **temperierte Distributionen**. Der Raum dieser temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

### Satz 20.15

Ein lineares Funktional  $T$  ist genau dann stetig auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , wenn es ein  $k \in \mathbb{N}_0$  und ein  $C > 0$  gibt, sodass für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$|T(f)| \leq C \cdot \|f\|_k$$

#### Bemerkung

1. Stetigkeit heißt wieder: Wenn  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , dann konvergiert  $T(f_n) \rightarrow T(f)$  in  $\mathbb{C}$ .
2. Für jedes  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  kann man wieder die Distribution  $T_f$  mit

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

betrachten. Das liefert nicht nur ein stetiges Funktional auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , sondern auch auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . (Das sind zwei Aussagen:  $T_f(\varphi)$  ist endlich für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $T_f$  ist auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  stetig.) Man kann also wieder  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{S}'$  einbetten. In diesem Sinne gilt:

$$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{D}'$$

3. Auch für jede Distribution  $T \in \mathcal{S}'$  kann man wieder die schwache Ableitung  $D^\alpha T$  bilden. Das ist nicht verwunderlich, weil ja auch  $T \in \mathcal{D}'$  liegt. Die Ableitung  $D^\alpha T$  liegt aber nicht nur in  $\mathcal{D}'$ , sondern auch (wie zu erwarten) in  $\mathcal{S}'$ .

### Beispiel 20.9

Die Delta-Distribution liegt in  $\mathcal{S}'$ , denn:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_0$$

Warum benötigt man neben  $\mathcal{D}'$  auch noch  $\mathcal{S}'$ ? Oder umgekehrt: Warum arbeitet man nicht nur mit dem „bequemerem“ Raum  $\mathcal{S}'$ ?

- Die jetzt zu definierende Fouriertransformation ist für  $\mathcal{S}$  bzw.  $\mathcal{S}'$  am besten zu definieren.
- $\mathcal{S}'$  reicht aber zur Behandlung von Differentialoperatoren nicht aus, weil manche Grundlösungen nur in  $\mathcal{D}'$  liegen.

**Definition 20.16**

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Unter der **Fouriertransformierten**  $F(f)$  bzw.  $\hat{f}$  versteht man folgende Funktion:

$$F(f)(p) \equiv \hat{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle p, x \rangle} dx \quad (20.7)$$

Unter der **inversen Fouriertransformierten**  $F^{-1}(f)$  bzw.  $\check{f}$  versteht man folgende Funktion:

$$F^{-1}(f)(x) \equiv \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(p) \cdot e^{i \cdot \langle p, x \rangle} dp \quad (20.8)$$

**Bemerkung**

1. Der Faktor  $(2\pi)^{-n/2}$  ist bewusst aus Symmetriegründen so gewählt (anders als manchen Büchern).
2. Man muss sich noch davon überzeugen, dass die Integrale in (20.7) und (20.8) überhaupt existieren:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(p)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|e^{-i \cdot \langle p, x \rangle}|}_{=1} \cdot |f(x)| dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^k} \cdot \underbrace{(1+\|x\|^2)^k \cdot |f(x)|}_{\leq C \quad [f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)]} dx \\ &\leq \frac{C}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^k} dx < \infty \end{aligned}$$

$\hat{f}$  existiert, da das letzte Integral konvergent ist. (Analog für  $\check{f}$ .)

3. Der Begriff „inverse Transformierte“ muss gerechtfertigt werden: Man muss zeigen, dass  $F^{-1}(F(f)) = F(F^{-1}(f)) = f$  ist. (Dies beinhaltet, dass  $F$  und  $F^{-1}$  von  $\mathcal{S}$  in sich abbilden (und mehr: die Abbildung ist sogar eineindeutig).

**Satz 20.17** Eigenschaften der Fouriertransformation

1.  $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ( $\mathcal{S}$  wird in sich abgebildet)

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} F(D_x^\alpha (x^\beta \cdot f))(p) &= i^{|\alpha|} \cdot i^{|\beta|} \cdot p^\alpha \cdot D_p^\beta F(f)(p) \\ F^{-1}(D_p^\alpha (p^\beta \cdot f))(x) &= (-i)^{|\alpha|} \cdot (-i)^{|\beta|} \cdot x^\alpha \cdot D_x^\beta F^{-1}(f)(x) \end{aligned} \quad (20.9)$$

Hierbei deuten die unteren Indizes von  $D_x$  und  $D_p$  die Ableitungsvariable an. Insbesondere ist:

$$\begin{aligned} F(x^\beta \cdot f)(p) &= i^{|\beta|} \cdot D_p^\beta F(f)(p) \\ F(D_x^\alpha f)(p) &= i^{|\alpha|} \cdot p^\alpha \cdot F(f)(p) \end{aligned} \quad (20.10)$$

Das heißt grob: Die Fouriertransformation überführt die Ableitung in die Multiplikation mit der Variable und umgekehrt.

**Beweis**

Es soll der Beweis nur angedeutet werden. Der wichtige Punkt ist, dass man die Ableitung in das Integral der Fouriertransformation hineinziehen kann. Zuerst muss man das uneigentliche Integral als  $\int_{K_r}$  mit  $r \rightarrow \infty$  schreiben. ( $K_r$  ist eine Kugel mit dem Radius  $r$ .) Das Integral darf man dann ableiten, und macht den Grenzübergang zum Schluss.

Der Übersichtlichkeit halber zeigen wir nur die Spezialfälle (20.10), aus diesen ergibt sich die erste Formel in (20.9) (die andere folgt analog).

$$\begin{aligned} [D_p^\beta F(f)](p) &= D_p^\beta \left[ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle x, p \rangle} dx \right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} D_p^\beta [f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle x, p \rangle}] dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot (-i)^{|\beta|} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x^\beta \cdot f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle x, p \rangle} dx = (-i)^{|\beta|} \cdot F(x^\beta \cdot f)(p) \end{aligned}$$

Die zweite Formel beweist man durch mehrfache Anwendung von Lemma 20.13. Beachte, dass die Funktion  $x^\gamma \cdot e^{-i\langle x, p \rangle}$  für alle  $\gamma$  in  $\mathcal{O}_M$  liegt.

$$\begin{aligned} F(D_x^\alpha f)(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (D_x^\alpha f)(x) \cdot e^{-i\langle x, p \rangle} dx = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot D_x^\alpha e^{-i\langle x, p \rangle} dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|} \cdot (-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot p^\alpha \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i\langle x, p \rangle} dx = i^{|\alpha|} \cdot p^\alpha \cdot F(f)(p) \end{aligned}$$

Nun können wir den ersten Teil des Satzes beweisen. Dass  $\hat{f}$  und  $\check{f}$  beliebig oft differenzierbar sind, ist einfach zu zeigen. Es fehlt noch die typische Schwartzraum-Eigenschaft. Mit (20.9) ist:

$$\left| p^\alpha \cdot D_p^\beta \hat{f}(p) \right| = \left| (-i)^{|\alpha|} \cdot (-i)^{|\beta|} \cdot F(D_x^\alpha (x^\beta \cdot f))(p) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left| e^{-i\langle x, p \rangle} \right|}_{=1} \cdot \left| D_x^\alpha (x^\beta \cdot f(x)) \right| dx < \infty$$

Denn  $f$  und somit auch  $D_x^\alpha (x^\beta \cdot f)$  ist aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , und für jedes  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx < \infty$ . Wenn für alle  $p \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\left| p^\alpha \cdot D_p^\beta \hat{f}(p) \right| < \infty$ , gilt das auch für das Supremum dieser Beträge. Damit ist  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . (Analog für  $\check{f}$ .) ■

Das Ziel ist nun, zu zeigen, dass  $F$  und  $F^{-1}$  tatsächlich zueinander invers sind. Den Beweis machen wir nur für  $n = 1$  und es soll uns genügen, die Beweisschritte nachzuvollziehen.

### Lemma 20.18

1. Für  $j(x) = \exp(-x^2/2)$  gilt  $F(j) = F^{-1}(j) = j$ .
2. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\varepsilon > 0$  seien  $f_\varepsilon$  und  $f^\varepsilon$  gegeben durch:

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \cdot f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{und} \quad f^\varepsilon(x) := f(\varepsilon \cdot x)$$

Dann gilt  $F(f^\varepsilon) = F(f)_\varepsilon$  und  $F^{-1}(f_\varepsilon) = F^{-1}(f)^\varepsilon$ .

3. Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt:

$$\begin{aligned} F(g \cdot F^{-1}(f)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} F(g)(x-p) \cdot f(p) dp \\ F^{-1}(g \cdot F(f)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} F^{-1}(g)(x-p) \cdot f(p) dp \end{aligned}$$

### Beweis

1. Folgende (häufig nützliche) Idee führt schnell zum Ziel. Es gilt:  $j'(x) = -x \cdot j(x)$  und  $j(0) = 1$ . Andererseits folgt aus Satz 20.17:

$$F(j')(p) = ip \cdot F(j)(p) \quad \text{und} \quad F(x \cdot j)(p) = i \cdot [F(j)'](p)$$

Daraus folgt durch Umstellen:

$$[F(j)'](p) = -p \cdot F(j)(p) \quad \text{sowie} \quad F(j)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

Das heißt, sowohl  $j$  als auch  $F(j)$  lösen das Anfangswertproblem  $g'(y) = -y \cdot g(y)$  mit  $y(0) = 1$ . Die Lösung dieses Problems ist eindeutig, somit ist  $j = F(j)$ .

2. Man zeigt zuerst, dass  $f_\varepsilon$  und  $f^\varepsilon$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  liegen, danach die eigentlichen Relationen mit einfacher Variablentransformation.
3. Diese Formeln folgen durch Vertauschung der Integrationsreihenfolgen, etwa:

$$\begin{aligned} F(g \cdot F^{-1}(f))(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \cdot g(y) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{ipy} \cdot f(p) \, dp \right] \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(p) \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-p)y} \cdot g(y) \, dy \right] \, dp \end{aligned}$$

■

### Satz 20.19 Fourier-Umkehrformel

Die Fouriertransformation ist eine eindeutige, in beiden Richtungen stetige Abbildung des Schwartzraumes  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auf sich. Es gilt:

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \text{id}|_{\mathcal{S}}$$

#### Beweis

Der Stetigkeitsbeweis ist eine Übungsaufgabe. Die Umkehrformel wird in zwei Schritten gezeigt:

- Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $F^{-1}(j^\varepsilon \cdot F(f))(x) \rightarrow F^{-1}(F(f))(x)$ .
- Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $F^{-1}(j^\varepsilon \cdot F(f))(x) \rightarrow f(x)$ .

Daraus folgt der erste Teil der Umkehrformel unmittelbar, der zweite ergibt sich analog.

■

### Satz 20.20

Für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt:

1.  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $f * g = g * f$
2.  $F(f \cdot g) = (2\pi)^{n/2} \cdot F(f) * F(g)$  und  $F(f * g) = (2\pi)^{n/2} \cdot F(f) \cdot F(g)$

Jetzt wird die Fouriertransformation auf die temperierten Distributionen übertragen.

#### Definition 20.21

Sei  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist die Fouriertransformation  $F(T) \equiv \hat{T}$  definiert durch

$$F(T)(f) = T(Ff) = T(\hat{f})$$

#### Bemerkung

Da  $F$  den  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in sich abbildet, ist  $T(Ff)$  definiert. Die Stetigkeit von  $F(T)$  folgt aus der von  $F$ :

$$g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g \quad \Rightarrow \quad Fg_n \xrightarrow{\mathcal{S}} Fg \quad \Rightarrow \quad T(Fg_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} T(Fg) \quad \Rightarrow \quad FT(g_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} FT(g)$$

Somit ist  $F(T)$  wieder eine temperierte Distribution.

**Satz 20.22**

1. Die Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist eine eindeutige, lineare Abbildung von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Sie ist die Fortsetzung der Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Für die Fouriertransformation gilt

$$D^\alpha (F(T)) = (-i)^{|\alpha|} \cdot F(x^\alpha T) \quad \text{und} \quad F(D^\alpha T) = i^\alpha \cdot x^\alpha \cdot F(T)$$

3. Für die inverse Fouriertransformation gilt

$$D^\alpha (F^{-1}(T)) = i^{|\alpha|} \cdot F^{-1}(x^\alpha T) \quad \text{und} \quad F^{-1}(D^\alpha T) = (-i)^\alpha \cdot x^\alpha \cdot F^{-1}(T)$$

**Bemerkung**

Zum ersten Punkt: Was heißt „Fortsetzung“? Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Bilde  $Ff \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und damit eine weitere Distribution  $T_{Ff} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Es ist  $T_{Ff} = F(T_f)$ . Das heißt, die Fouriertransformation wurde auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  so definiert, dass sie zur Transformation auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  kompatibel ist.

Zum zweiten und dritten Punkt: Es liegen auch  $D^\alpha T$  und  $x^\alpha \cdot T$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . (Die Formeln folgen sofort aus den Eigenschaften der Fouriertransformation in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ).

**Beispiel 20.10**

## Fouriertransformation der Delta-Distribution

$$Ff = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i \cdot \langle p, x \rangle} dx \quad \Rightarrow \quad (F\delta)(f) = \delta(Ff) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) \cdot 1] dx$$

Somit ist

$$F\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot 1$$

Genauer:  $F\delta$  ist die reguläre Distribution  $T_{(2\pi)^{-n/2}}$ , die von dieser konstanten Funktion erzeugt wird. Mit der inversen Fouriertransformation folgt umgekehrt:

$$F(T_1) = (2\pi)^{n/2} \cdot \delta$$

## Anwendung der Fouriertransformation auf die Lösungen von Differentialgleichungen

Sei ein Polynom  $P$  gegeben durch  $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot \xi^\alpha$  mit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $P(D)$  mit  $P(D)u := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot D^\alpha u$  ein auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definierter Differentialoperator. Nach der Anwendung der Fouriertransformation erhält man (mithilfe von Satz 20.22):

$$F(P(D)u)(p) = P(ip) \cdot F(u)(p)$$

Hat man nun eine Differentialgleichung der Form

$$P(D)u = f \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (20.11)$$

so geht man zur Lösung formal so vor:

$$F(P(D)u) = P(ip) \cdot F(u) = F(f) \quad \Rightarrow \quad F(u) = \frac{F(f)}{P(ip)} \xrightarrow{F^{-1}} u = F^{-1} \left( \frac{F(f)}{P(ip)} \right)$$

Hierbei muss  $F(f)/P(ip)$  so sein, dass  $F^{-1}$  anwendbar ist.

**Beispiel 20.11** Laplace-Operator

Sei  $c > 0$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Betrachte die Differentialgleichung

$$(-\Delta + c^2) \cdot u = f$$

Wende die Fouriertransformation an:

$$(p_1^2 + \dots + p_n^2 + c^2) \cdot \hat{u}(p) = \hat{f}(p) \quad \Rightarrow \quad u = F^{-1} \left( \frac{\hat{f}(p)}{p_1^2 + \dots + p_n^2 + c^2} \right)$$

Dies wollen wir nur für  $n = 1$  näher betrachten. Sei  $v(x) = \exp(-c \cdot |x|)/2c$ . Was ist  $\hat{v}(p)$ ?

$$\hat{v}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \cdot \frac{1}{2c} \cdot e^{-c \cdot |x|} dx$$

Das  $\exp(-ipx)$  kann man in  $\cos(ipx) - i \cdot \sin(ipx)$  zerlegen. Das  $\sin \cdot \exp$  fällt aus Symmetriegründen weg:

$$\hat{v}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{c^2 + p^2}$$

Für die Lösung der Differentialgleichung  $-(d^2/dx^2 + c^2)u = f$  erhält man also mit den obigen Bezeichnungen:

$$\hat{u}(p) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(p) \cdot \hat{v}(p) = F(f * v)(p) \quad \Rightarrow \quad u(x) = (f * v)(x) = \frac{1}{2c} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-c \cdot |x-y|} dy$$

**Ergänzungen zur Delta-Distribution**

Wir finden verschiedene Regeln für die Delta-Distribution. Was bedeuten diese?

1.  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \cdot [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$  – Was ist im Allgemeinen  $\delta(f(x))$ ?
2.  $\int \delta(z - x) \cdot \delta(x - a) dx = \delta(z - a)$
3. Was ist  $\int_a^b \delta(x) dx$ ? (Das kann man über eine Fallunterscheidung formulieren.)