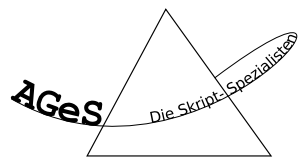


ANALYSIS IV FÜR PHYSIKER

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Werner Timmermann
(Sommersemester 2008)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort (zuerst lesen)	3
21 Hilberträume	4
21.1 Wiederholung: Metrische und normierte Räume	4
21.2 Hilberträume	7
22 Beschränkte lineare Operatoren	18
22.1 Allgemeine Eigenschaften. Beispiele	18
22.2 Der adjungierte Operator	23
22.3 Das Spektrum	28
23 Kompakte Operatoren	36
23.1 Definition. Erste Eigenschaften	36
23.2 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren	39
23.3 Der allgemeine Zustandsbegriff	41
24 Bemerkungen zum Spektraltheorem	44
25 Der Begriff der Holomorphie	51
25.1 Wiederholung: Komplexe Zahlen. Komplexe Funktionen	51
25.2 Differenzierbarkeit und Holomorphie	51
26 Integration holomorpher Funktionen	55
26.1 Komplexe Kurvenintegrale	55
26.2 Cauchyscher Integralsatz. Cauchysche Integralformel	56
27 Einige elementare Funktionen	65
27.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	65
27.2 Die Logarithmusfunktion	67
28 Einige Anwendungen der Cauchyschen Integralformel	69
29 Singularität holomorpher Funktionen	75
29.1 Der Punkt ∞	75
29.2 Isolierte Singularitäten und Laurent-Entwicklung	76
29.3 Der Residuensatz	82
30 Ergänzungen zur Funktionentheorie	90
30.1 Analytische Fortsetzung	90
30.2 Konforme Abbildungen	93
30.2.1 Zum Primzahlsatz	94

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
www.ages-skripte.org

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

21 Hilberträume

21.1 Wiederholung: Metrische und normierte Räume

Sei $M \neq \emptyset$. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** in M , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Definitheit: $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Dann heißt (M, d) ein **metrischer Raum**. In einem metrischen Raum kann man die Konvergenz von Folgen definieren.

- Eine Folge (x_n) aus M **konvergiert** bezüglich dieser Metrik d gegen $x \in M$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) : d(x, x_n) < \varepsilon$$

Man schreibt $x_n \rightarrow x$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

- Eine Folge (x_n) aus M heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall m, n > n_0(\varepsilon) : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Natürlich ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.

- (M, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Eine Teilmenge $A \subset (M, d)$ heißt **dicht** in M , wenn gilt:

$$\forall x \in M, \varepsilon > 0 \exists a(x, \varepsilon) \in A : d(x, a) < \varepsilon$$

Äquivalent dazu ist die Aussage: Zu jedem $x \in M$ existiert eine Folge aus A , die gegen x konvergiert.

Satz 21.1

Jeder metrische Raum (M, d) besitzt eine Vervollständigung $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$, d.h.

1. Der Raum $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ ist vollständig.
2. Es existiert eine eindeutige Abbildung j von M nach \widetilde{M} , für die $j(M)$ in $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ dicht liegt.
3. Die Abbildung j ist **isometrisch**, d.h. für alle $x, y \in M$ gilt $d(x, y) = \widetilde{d}(j(x), j(y))$.

$(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Im Folgenden werden wir Vektorräume und lineare Abbildungen darin betrachten. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{C} oder \mathbb{R} . (Im Folgenden wird implizit immer \mathbb{C} gewählt.) Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- positive Definitheit: $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Homogenität: $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Jede Norm induziert eine Metrik durch $d(x, y) := \|x - y\|$, also kann man prinzipiell bei jeder Metrik fragen, ob sie durch eine Norm induziert ist. Man muss aber beachten, dass nicht jeder metrischer Raum ein Vektorraum ist.

Ein *vollständiger normierter* Raum heißt **Banachraum**. Aus den Eigenschaften der Norm folgt, dass die Vektorraumoperationen in V stetig sind, d.h. wenn $\lambda_n \rightarrow \lambda$ in \mathbb{C} sowie $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ in V konvergieren, dann folgt:

- $\lambda_n \cdot x_n \rightarrow \lambda \cdot x$
- $x_n + y_n \rightarrow x + y$

Häufig wird die folgende Abschätzung benötigt (vgl. Eigenschaften des absoluten Betrages in \mathbb{R}):

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Daraus folgt, dass aus der Konvergenz $x_n \rightarrow x$ auch die von $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ folgt.

Folgenräume

1. $l^\infty = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{C}, \{x_n\} \text{ beschränkt, d.h. } \exists C : \forall n : |x_n| \leq C\}$

Eine Norm ist durch $\|x\| = \|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$ definiert. Der Raum l^∞ ist vollständig, also ein Banachraum. Die folgenden wichtigen Unterräume werden mit derselben Norm betrachtet.

2. $\mathbf{c} = \{(x_n) : (x_n) \text{ ist konvergent}\}$
3. $\mathbf{c}_0 = \{(x_n) : x_n \rightarrow 0\}$
4. $\mathbf{d} = \{(x_n) : \exists n_0((x_n)) : \forall n > n_0 : x_n = 0\}$ (Vektorraum aller abbrechenden Folgen)

\mathbf{c} und \mathbf{c}_0 sind *abgeschlossene* Unterräume von l^∞ . Weil l^∞ vollständig ist, sind auch \mathbf{c} und \mathbf{c}_0 vollständig.

5. die l^p -Räume mit $1 \leq p < \infty$

$$l^p = \left\{ (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad \|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Alle l^p -Räume sind Banach-Räume.

Beweis dass l^p ein Vektorraum ist

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(x_n) \in l^p$, dann ist offensichtlich auch $(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot (x_n) \in l^p$. Schwieriger ist der Nachweis, dass für $x = (x_n)$ und $y = (y_n) \in l^p$ auch $x + y = (x_n + y_n) \in l^p$ ist.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot \max\{|x_n|, |y_n|\})^p = 2^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \max\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \\ &\leq 2^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^p + |y_n|^p) \leq 2^p \cdot (\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) < \infty \end{aligned}$$

Diese Abschätzung liefert *nicht* die Dreiecksungleichung.

Die Dreiecksungleichung für Folgen hat einen speziellen Namen, man nennt sie auch **Minkowski-Ungleichung**: Für $x, y \in l^p$, $1 \leq p < \infty$ gilt: $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Diese Ungleichung folgt aus einer weiteren wichtigen Ungleichung:

Satz 21.2 Hölder-Ungleichung für Folgen

1. Für $x \in l^1, y \in l^\infty$ ist $x \cdot y := (x_n \cdot y_n) \in l^1$ und es gilt $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$.
2. Für $1 < p < \infty$ und $q := p/(p-1)$, also $1/p + 1/q = 1$ gilt: Wenn $(x_n) \in l^p$ und $(y_n) \in l^q$, dann ist $(x_n \cdot y_n) \in l^1$ mit $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$.

Beweis der ersten Ungleichung unter Anwendung eines wichtigen Schlussprinzips

$$\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k| \leq \sup_k |y_k| \cdot \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \|y\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^n |x_k| = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1$$

Die Folge $(\sum_{k=1}^n |x_k \cdot y_k|)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich der Grenzwert $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$. ■

Funktionsräume

1. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. $C(K)$ ist der Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf K . Eine Norm ist definiert durch

$$\|f\| = \|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

$C(K)$ ist ein Banachraum. Die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist genau die gleichmäßige Konvergenz in K .

2. Sei $I = [a, b]$ oder $I = (a, b)$ oder I ein (offener) Würfel in \mathbb{R}^n oder eine andere Menge. Dann ist

$$L^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} : \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad \|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Diese Definition bereitet Probleme:

- a) Nimmt man in der Definition das Riemann-Integral, sind diese Räume uninteressant, weil sie nicht vollständig sind. Man benötigt das Lebesgue-Integral.
- b) Hat man $L^p(I)$ mit dem Lebesgue-Maß eingeführt, sind die Elemente von $L^p(I)$ nicht einzelne Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Lebesgue-Maß Null unterscheiden.

Unser Dilemma ist, dass L^2 für die praktischen Anwendungen, insbesondere die Quantenmechanik, fundamental ist.

21.2 Hilberträume

Definition 21.3

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{C} . Unter einem **Skalarprodukt** auf V versteht man eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (für alle $\varphi, \psi, \chi \in V$ und $c \in \mathbb{C}$):

1. Definitheit: $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ und $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$
2. Distributionsgesetz: $\langle \varphi, \psi + \chi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \chi \rangle$
3. Linearität im zweiten Glied: $\langle \varphi, c \cdot \psi \rangle = c \cdot \langle \varphi, \psi \rangle$
4. konjugierte Symmetrie: $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **unitärer Raum**.

Bemerkung

Aus der dritten und der vierten Eigenschaft folgt die konjugierte Linearität im ersten Glied:

$$\langle c \cdot \varphi, \psi \rangle = \bar{c} \cdot \langle \varphi, \psi \rangle$$

Aus der zweiten und vierten Eigenschaft folgt, dass das Distributionsgesetz in beiden Gliedern gilt:

$$\langle \varphi + \psi, \chi \rangle = \langle \varphi, \chi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle$$

Die dritte Eigenschaft steht im Einklang mit den Gepflogenheiten der Physik (in vielen Mathematikbüchern ist hingegen das erste Glied linear).

Beispiel 21.1

Wichtige unitäre Räume

- Im \mathbb{C}^n mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ setzt man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \cdot y_k$$

- Im l^2 mit den Elementen $x = (x_k)$ und $y = (y_k)$ definiert man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k \cdot y_k$$

- Für $C[a, b]$ ist ein Skalarprodukt zwischen $f, g \in C[a, b]$ gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \bar{f}(x) \cdot g(x) \, dx$$

- Im $L^2[a, b]$ wird das Skalarprodukt genauso definiert, nur nimmt man kein Riemann-, sondern ein Lebesgue-Integral.

Bemerkung

Wir werden in Kürze sehen, dass (wie in der linearen Algebra) durch $\|\varphi\| := \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$ eine Norm im unitären Raum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definiert wird.

Das Ziel ist jetzt, eine Orthonormalbasis in unitären Räumen zu definieren.

Definition 21.4

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum.

1. $\varphi, \psi \in V$ heißen **orthogonal**, wenn $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ ist.
2. Eine Familie von Elementen $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ aus V (\mathcal{A} ist eine beliebige Indexmenge) heißt **Orthogonalsystem**, wenn $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = 0$ ist für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ mit $\alpha \neq \beta$.
3. $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ heißt **Orthonormalsystem**, wenn $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ ist.

Bemerkung

Der Standardfall für uns wird sein, dass \mathcal{A} eine abzählbare Menge ist.

Satz 21.5 Verallgemeiner Satz des Pythagoras

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $(\varphi_i)_{i=1}^N$ ein endliches Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $\varphi \in V$:

$$\|\varphi\|^2 := \langle \varphi, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 + \left\| \varphi - \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i \right\|^2 \quad (21.2)$$

Beweis

Trivialerweise gilt:

$$\varphi = \underbrace{\sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i}_{=: \psi} + \underbrace{\left(\varphi - \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i \right)}_{=: \chi}$$

Wir zeigen, dass $\langle \psi, \chi \rangle = 0$ ist. In den beiden Vektoren sollten unterschiedliche Summationsindizes verwendet werden.

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \varphi - \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \varphi_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \varphi \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \varphi_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \overline{\langle \varphi_i, \varphi \rangle} \cdot \langle \varphi_i, \varphi \rangle - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{\langle \varphi_i, \varphi \rangle} \cdot \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \underbrace{\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 - \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 = 0 \end{aligned}$$

Jetzt können wir $\langle \varphi, \varphi \rangle$ berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle &= \langle \psi + \chi, \psi + \chi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle + \underbrace{\langle \psi, \chi \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \chi, \psi \rangle}_{=0} + \langle \chi, \chi \rangle \\ &= \|\psi\|^2 + \|\chi\|^2 \\ \|\psi\|^2 &= \langle \psi, \psi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i, \sum_{j=1}^N \langle \varphi_j, \varphi \rangle \cdot \varphi_j \right\rangle = (\text{s.o.}) = \sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung ohne weiteren Aufwand. ■

Folgerung 21.6 Besselsche Ungleichung

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $(\varphi_i)_{i=1}^N$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $\varphi \in V$:

$$\sum_{i=1}^N |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2 \quad (*)$$

Insbesondere folgt für ein abzählbares Orthonormalsystem $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Die in (*) links stehenden Partialsummen zur unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2$ sind monoton wachsend und durch $\|\varphi\|^2$ nach oben beschränkt, also konvergiert die Reihe und wir haben folgende Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \varphi_i, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2$$

Folgerung 21.7 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

In jedem unitärem Raum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \quad (21.3)$$

Beweis

Für $\psi = 0$ ist (21.3) trivialerweise richtig (beide Terme verschwinden). Sei nun $\psi \neq 0$, dann setze $\varphi_1 := \psi / \|\psi\|$. Es ist $\|\varphi_1\| = 1$, also ist (φ_1) ein einelementiges Orthonormalsystem. Es gilt mit der Besselschen Ungleichung für ein beliebiges $\varphi \in V$ (beachte: $N = 1$):

$$|\langle \varphi_1, \varphi \rangle|^2 = \left| \left\langle \frac{\psi}{\|\psi\|}, \varphi \right\rangle \right|^2 \leq \|\varphi\|^2 \Rightarrow |\langle \psi, \varphi \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2 \cdot \|\psi\|^2$$

■

Im l^2 ergibt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gerade die Höldersche Ungleichung für $p = q = 2$:

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

Folgerung 21.8

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Dann ist $\|\varphi\| := (\langle \varphi, \varphi \rangle)^{1/2}$ eine Norm auf V .

Bemerkung

1. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt auch für Semi-Skalarprodukte, d.h. bei der positiven Definitheit muss $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ nicht nur bei $\varphi = 0$ sein.
2. Hat man ein Skalarprodukt, dann hat man eine daraus abgeleitete Norm $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ und damit eine Metrik. Alle Aussagen in diesem unitären Raum über Konvergenz, Stetigkeit und so weiter beziehen sich immer auf diese induzierte Norm bzw. Metrik.

Definition 21.9

Ein *vollständiger* unitärer Raum heißt **Hilbertraum**.

In diesem Skript werden Hilberträume immer mit kalligrafierten Buchstaben $(\mathcal{H}, \mathcal{K}, \dots)$ dargestellt.

Bemerkung

1. Wenn $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unvollständiger unitärer Raum ist, dann kann man ihn zu einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$ vervollständigen. V liegt dann dicht in \mathcal{H} . Daher heißen unvollständige unitäre Räume auch **Prähilberträume**.
2. Im Folgenden betrachten wir nur sogenannte **separable Hilberträume**, das heißt solche, in denen eine *abzählbare*, dichte Menge $\{\psi_i\}$ existiert.

Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm in V . Wann ist $\|\cdot\|$ durch ein Skalarprodukt gegeben?

Satz 21.10

Eine Norm in einem Vektorraum V ist genau dann durch ein Skalarprodukt gegeben, wenn die Norm die sogenannte **Parallelogrammidentität** erfüllt:

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2 \cdot (\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2) \quad \forall \varphi, \psi \in V \quad (21.4)$$

Wenn diese Gleichung gilt, dann wird das Skalarprodukt eindeutig durch die sogenannte **Polarisationsidentität** gegeben:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{4} \cdot (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i \cdot \|\varphi - i \cdot \psi\|^2 - i \cdot \|\varphi + i \cdot \psi\|^2) \quad (21.5)$$

Bemerkung

1. Achtung: Wenn das Skalarprodukt als im ersten Faktor linear definiert wurde, ändern sich die markierten Vorzeichen in (21.5).
2. Die Notwendigkeit der obigen Bedingung, das heißt, dass (21.5) gilt, wenn die Norm durch ein Skalarprodukt gegeben ist, ist einfach zu beweisen, aber mühsam nachzurechnen. Die Hinlänglichkeit, das heißt, dass in (21.5) wirklich ein Skalarprodukt steht, ist aufwändig.

Nun wollen wir einen gegebenen Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ in eine Projektion auf einen gegebenen Unterraum und das zugehörige orthogonale Komplement zerlegen. Ein wichtiger Schritt dazu ist der folgende Satz.

Satz 21.11

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, $K \subset \mathcal{H}$ eine abgeschlossene und konvexe Menge und $\varphi_0 \in \mathcal{H}$. Dann existiert genau ein $\psi_0 \in K$ mit

$$\|\varphi_0 - \psi_0\| = \text{dist}(\varphi_0, K) := \inf_{\psi \in K} \|\varphi_0 - \psi\| \leq \|\varphi_0 - \varrho\| \quad \forall \varrho \in K \quad (21.6)$$

Anschaulich bedeutet das, dass es genau einen Punkt $\psi_0 \in K$ gibt, der „am dichtesten“ an φ_0 liegt. Außerdem gilt:

$$\text{Re} \langle \psi, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \leq \text{Re} \langle \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \quad \forall \psi \in K \quad (21.7)$$

Bemerkung

1. Dass K konvex ist, heißt: Wenn $\varphi, \psi \in K$ und $t \in [0, 1]$, dann ist $t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi \in K$ (die gesamte Verbindungsstrecke zwischen φ und ψ liegt in K).
2. Für den Satz benötigt man beide Voraussetzungen an K : Wäre K nicht abgeschlossen, so gäbe es den geforderten Punkt ψ_0 nicht, da kein $\|\varphi_0 - \psi\|$ das Infimum annehmen würde (mit anderen Worten: es gäbe kein Minimum). Wäre K nicht konvex, wäre die Eindeutigkeit verletzt (man stelle sich zum Beispiel eine kreisförmige, innen hohle Menge vor, in deren Mittelpunkt φ_0 liegt).
3. Eine typische Anwendung wird sein, dass K ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} ist.

Beweis

Sei $d = \text{dist}(\varphi_0, K) = \inf_{\psi \in K} \|\varphi_0 - \psi\|$. Aus der Infimumsdefinition folgt, dass es eine Folge (ψ_n) aus K gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_0 - \psi_n\| = d$$

Aus der Parallelogrammidentität (21.4) werden wir jetzt folgern, dass (φ_n) eine Cauchyfolge ist. Setze $\varphi := \varphi_0 - \psi_m$ und $\psi := \varphi_0 - \psi_n$ in (21.4) ein. Es folgt:

$$2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_m\|^2 + 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_n\|^2 = \|2 \cdot \varphi_0 - \psi_m - \psi_n\|^2 + \|\psi_n - \psi_m\|^2 \quad (*)$$

Da K konvex ist, liegt mit ψ_n und ψ_m auch $(\psi_n + \psi_m)/2$ in K .

$$\|2 \cdot \varphi_0 - \psi_m - \psi_n\| = 2 \cdot \left\| \varphi_0 - \frac{\psi_m + \psi_n}{2} \right\| \geq 2d$$

Die letzte Abschätzung ist richtig wegen der Definition von d . Aus (*) folgt also:

$$\begin{aligned} \|\psi_n - \psi_m\|^2 &= 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_m\|^2 + 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_n\|^2 - 4 \cdot \left\| \varphi_0 - \frac{\psi_m + \psi_n}{2} \right\|^2 \quad (21.8) \\ &\leq \underbrace{2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_m\|^2}_{\rightarrow d^2} + \underbrace{2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_n\|^2}_{\rightarrow d^2} - 4 \cdot d^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das heißt, dass (ψ_n) eine Cauchyfolge ist, daher existiert, da \mathcal{H} vollständig ist, ein $\psi_0 \in \mathcal{H}$ mit $\psi_n \rightarrow \psi_0$. Da (ψ_n) in der abgeschlossenen Menge K liegt, ist auch $\psi_0 \in K$. ψ_0 erfüllt (21.6), damit ist die Existenz des ψ_0 gezeigt.

Es ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Sei $\psi'_0 \in K$ ein weiteres Element, das (21.6) erfüllt, das heißt: $\|\varphi_0 - \psi_0\| = \|\varphi_0 - \psi'_0\| = d$. Analog zu (21.8) mit ψ'_0 anstelle von ψ_m und ψ_0 anstelle von ψ_n folgt:

$$\begin{aligned} \|\psi_0 - \psi'_0\| &= 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi_0\|^2 + 2 \cdot \|\varphi_0 - \psi'_0\|^2 - 4 \cdot \left\| \varphi_0 - \frac{\psi_0 + \psi'_0}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2 \cdot d^2 + 2 \cdot d^2 - 4 \cdot d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \psi'_0 \end{aligned}$$

Jetzt wird (21.7) gezeigt. Für $\psi \in K$, $t \in [0, 1]$ gilt, weil K konvex ist:

$$\psi_0 + t \cdot (\psi - \psi_0) = (1 - t) \cdot \psi_0 + t \cdot \psi \in K$$

Benutze folgende Gleichung:

$$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \text{Re} \langle a, b \rangle$$

Dann folgt aus (21.6), weil der Abstand von φ_0 zu ψ_0 kleiner ist als zu irgendeinem anderen $\psi \in K$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_0 - \psi_0\|^2 &\leq \|\varphi_0 - [\varphi_0 + t \cdot (\psi - \psi_0)]\|^2 \\ &= \|(\varphi_0 - \psi_0) - t \cdot (\psi - \psi_0)\|^2 \\ &= \|\varphi_0 - \psi_0\|^2 + t^2 \cdot \|\psi - \psi_0\|^2 + 2t \cdot \text{Re} \langle \psi - \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \\ &\Rightarrow t \cdot \|\psi - \psi_0\|^2 - 2 \cdot \text{Re} \langle \psi - \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ folgt (21.7) nach einfacher Umformung. ■

Wir benutzen folgende Bezeichnungen: \mathcal{H} sei ein Hilbertraum und $M \subset \mathcal{H}$ sei nichtleer.

$$M^\perp := \{\varphi \in \mathcal{H} : \varphi \perp M\} = \{\varphi \in \mathcal{H} : \forall \psi \in M : \langle \varphi, \psi \rangle = 0\}$$

M^\perp heißt **Orthogonalraum** oder **orthogonales Komplement** von M . Das orthogonale Komplement ist stets ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} (unabhängig von der Struktur von M). Offenbar gilt:

$$M^\perp = \bigcap_{\psi \in M} \{\psi\}^\perp = \bigcap_{\psi \in M} \{\varphi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, \psi \rangle = 0\}$$

Bemerkung

Bei den folgenden Betrachtungen überlege man, wie die entsprechenden Aussagen im endlichdimensionalen Fall (siehe Lineare Algebra) gezeigt wurden.

Satz 21.12 Projektionssatz

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann hat jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Darstellung

$$\varphi = \psi + \psi^\perp \quad \text{mit} \quad \psi \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$$

ψ heißt **orthogonale Projektion** von φ auf \mathcal{L} . Durch die Zuordnung $\varphi \mapsto \psi := P\varphi$ wird eine lineare Abbildung bzw. ein linearer Operator P definiert, der für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ die Eigenschaft hat:

$$\|P\varphi\| \leq \|\varphi\|$$

Dies werden wir später kurz als $\|P\| \leq 1$ schreiben.

Bemerkung

Im Endlichdimensionalen würde man dieses ψ und ψ^\perp etwa mit Orthonormalbasen finden.

Beweis

Da \mathcal{L} konvex und abgeschlossen ist, kann der vorige Satz angewendet werden. Es existiert also genau ein $\psi \in \mathcal{L}$ mit

$$\|\varphi - \psi\| = \text{dist}(\varphi, \mathcal{L}) =: d$$

Wir zeigen: $\psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$. Dazu wird (21.7) benutzt. Es gilt also wegen $\varphi - \psi = \psi^\perp$:

$$\text{Re} \langle \chi, \psi^\perp \rangle \leq \text{Re} \langle \psi, \psi^\perp \rangle \quad \forall \chi \in \mathcal{L}$$

Für alle $c \in \mathbb{C}$ ist natürlich $c \cdot \chi \in \mathcal{L}$, also kann oben χ durch $c \cdot \chi$ ersetzt werden.

$$\text{Re} \left[c \cdot \langle \chi, \psi^\perp \rangle \right] \leq \text{Re} \langle \psi, \psi^\perp \rangle \quad \forall c \in \mathbb{C}, \chi \in \mathcal{L}$$

Da c beliebig gewählt werden kann, aber der linke Term trotzdem wie angegeben nach oben beschränkt bleibt, muss $\langle \chi, \psi^\perp \rangle = 0$ und damit $\psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$ sein.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\varphi = \psi + \psi^\perp = \psi' + \psi'^\perp$ mit $\psi, \psi' \in \mathcal{L}$ und $\psi^\perp, \psi'^\perp \in \mathcal{L}^\perp$, dann ist:

$$\underbrace{\psi - \psi'}_{\in \mathcal{L}} = \underbrace{\psi^\perp - \psi'^\perp}_{\in \mathcal{L}'} \Rightarrow \begin{cases} \psi - \psi' = 0 \\ \psi^\perp - \psi'^\perp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = \psi' \\ \psi^\perp = \psi'^\perp \end{cases}$$

Denn 0 ist das einzige Element, das sowohl in \mathcal{L} als auch in \mathcal{L}' liegt.

Jetzt soll gezeigt werden, dass P linear ist, dass also gilt: $P(c \cdot \varphi_1 + \varphi_2) = c \cdot P\varphi_1 + P\varphi_2$. Mit einfacher Umformung ergibt sich:

$$c \cdot \varphi_1 + \varphi_2 = \underbrace{c \cdot P\varphi_1 + P\varphi_2}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{c \cdot (\varphi_1 - P\varphi_2) + (\varphi_2 - P\varphi_2)}_{\in \mathcal{L}^\perp}$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage folgt, dass $c \cdot P\varphi_1 + P\varphi_2$ die Projektion von $c \cdot \varphi_1 + \varphi_2$ auf \mathcal{L} ist.

$P\varphi$ und $\varphi - P\varphi$ sind also orthogonal, deshalb folgt mit dem Satz von Pythagoras die im Satz vermerkte Abschätzung durch:

$$\|\varphi\|^2 = \|P\varphi + (\varphi - P\varphi)\|^2 = \|P\varphi\|^2 + \|\varphi - P\varphi\|^2 \leq \|P\varphi\|^2$$

Bemerkung

zur Anwendung dieses Projektionssatzes auf die Zerlegung des Hilbertraumes bzw. weitere Konstruktionen mit Hilberträumen

Aus dem Projektionssatz folgt $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$, das heißt, \mathcal{H} ergibt sich als orthogonale direkte Summe von \mathcal{L} und \mathcal{L}' . Was heißt das?

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}$ zwei beliebige abgeschlossene Unterräume mit $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{\varphi_1 + \varphi_2 : \varphi_i \in \mathcal{H}_i\}$$

wieder ein Unterraum von \mathcal{H} . \mathcal{K} heißt **direkte Summe** von \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 , man schreibt $\mathcal{K} := \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Wegen $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ lässt sich jedes $\psi \in \mathcal{K}$ *eindeutig* als $\psi = \psi_1 + \psi_2$ mit $\psi_i \in \mathcal{H}_i$ darstellen. Eine **orthogonale direkte Summe** liegt dann vor, wenn $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$ ist (die Bedingung $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ ist dann automatisch erfüllt). Man schreibt dann $\mathcal{K} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Seien nun $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1), (\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ zwei a priori unabhängige Hilberträume. Dann bilden wir einen neuen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wie folgt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_i \in \mathcal{H}_i\} \quad \text{und} \quad \langle \varphi, \psi \rangle := \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_1 + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle_2$$

Man kann die \mathcal{H}_i wie folgt in \mathcal{H} einbetten:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \in \mathcal{H}_1 &\mapsto (\varphi_1, 0) \in \mathcal{H} \\ \varphi_2 \in \mathcal{H}_2 &\mapsto (0, \varphi_2) \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Man identifiziert also \mathcal{H}_1 mit $\{(\varphi_1, 0) : \varphi_1 \in \mathcal{H}_1\}$ und \mathcal{H}_2 analog. \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 sind zueinander orthogonal, genauer ist $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^\perp$ und umgekehrt. Auf offensichtliche Weise definiert man die direkte Summe $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ endlich vieler Hilberträume. Eine interessante Übungsaufgabe ist die Charakterisierung der direkten Summe unendlich vieler Hilberträume.

Unser Ziel ist es nun, Orthonormalbasen in Hilberträumen zu finden.

Definition und Satz 21.13

Für ein Orthonormalsystem (φ_n) eines Hilbertraumes \mathcal{H} sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $\text{lin}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in \mathcal{H} .
2. Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, \varphi \rangle \cdot \varphi_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, \varphi \rangle \cdot \varphi_n$$

3. Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt die **Parsevalsche Identität**: $\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_n, \varphi \rangle|^2$
Die $\langle \varphi_n, \varphi \rangle$ heißen **Fourierkoeffizienten** von φ bezüglich (φ_n) .

Besitzt das Orthonormalsystem (φ_n) diese Eigenschaften, so heißt es **Orthonormalbasis**.

Bemerkung

1. Die Menge $\text{lin}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ umfasst alle *endlichen* Linearkombinationen der φ_n .
2. Im Endlichdimensionalen ist Satz 21.13 uninteressant, da $\text{lin}\{\varphi_n\} = \mathcal{H}$ für $\dim \mathcal{H} = n$.

Beweis

Man denke an Satz 21.3. Dort hatten wir folgende Konstellation:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \sum_{k=1}^N |\langle \varphi_k, \varphi \rangle|^2 + \left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right\|^2 & (*) \\ \varphi &= \underbrace{\sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k}_{=\psi} + \underbrace{\left(\varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right)}_{=\chi} \end{aligned}$$

Dann wurde gezeigt, dass $\psi \perp \chi$ ist. Das heißt, dass ψ gerade die Projektion von φ auf den von $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ aufgespannten Unterraum \mathcal{H}_N ist. Also ist $\psi = P_N \varphi$. Dann gilt laut dem Projektionssatz:

$$\|\varphi - P_N \varphi\| = \text{dist}(\varphi, \mathcal{H}_N)$$

Aus 1. folgt 3.: Die lineare Hülle $\text{lin}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in \mathcal{H} , das heißt: Zu jedem $\varphi \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Linearkombination $\psi := \sum_{k=1}^{n_0} c_k \cdot \varphi_k$ mit

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \cdot \varphi_k \right\|^2 < \varepsilon$$

Dann gilt offensichtlich für alle $n > n_0$: $\varphi \in \mathcal{H}_{n_0} \subset \mathcal{H}_n$. Nun folgt mit (*):

$$0 \leq \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle \varphi_k, \varphi \rangle|^2 = \|\varphi - P_n \varphi\|^2 = \text{dist}^2(\varphi, \mathcal{H}_n) \leq \|\varphi - \psi\|^2 < \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt auch noch für $n \rightarrow \infty$ und da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein darf, folgt die Parsevalsche Identität.

Aus 3. folgt 2.: Wegen (*) folgt:

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right\|^2 = \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^N |\langle \varphi_k, \varphi \rangle|^2$$

Dieser Term geht für $N \rightarrow \infty$ wegen der Voraussetzung gegen Null, also:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k$$

Aus 2. folgt 1.: ist einfach zu zeigen, denn die Voraussetzung beinhaltet:

$$\sum_{k=1}^N \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \rightarrow \varphi$$

Das heißt, für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , für das gilt:

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n_0} \langle \varphi_k, \varphi \rangle \cdot \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

Das ist gerade die Anforderung für Dichtheit. ■

Satz 21.14

Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis

In beliebigen Hilberträumen wird dieser Satz mithilfe des „Lemmas von Zorn“ bewiesen. (Grob gesprochen ersetzt das Lemma im nicht-abzählbaren Fall das Induktionsaxiom.) Einfacher geht es in separablen Hilberträumen, das heißt, es existiert eine abzählbare, dichte Menge $\{\psi'_n : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{H} . Diese Menge wollen wir als Folge (ψ'_n) schreiben.

Nun bilden wir eine neue Folge (ψ_n) , indem wir nacheinander aus (ψ'_n) alle Elemente ausschließen, die Linearkombinationen der vorhergehenden sind (o.E.d.A. sei $\psi'_1 = \psi_1 \neq 0$). Diese neue Folge (ψ_n) hat folgende zwei Eigenschaften:

- Endlich viele dieser ψ_k sind stets linear unabhängig.
- Es ist $\text{lin}\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} = \text{lin}\{\psi'_n : n \in \mathbb{N}\}$, diese Menge ist dicht in \mathcal{H} .

Auf (ψ_n) wird das **Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren** aus der Linearen Algebra angewendet:

1. Das erste Element ist $\varphi_1 := \psi_1 / \|\psi_1\|$, also die Normierung von ψ_1 .
2. Das zweite Element φ_2 ist die Normierung von $\varphi'_2 := \psi_2 - \langle \varphi_1, \psi_2 \rangle \cdot \varphi_1$, dem Anteil von ψ_2 , der senkrecht auf φ_1 steht.
3. Allgemein ist φ_n für $n > 1$ die Normierung von $\varphi'_n := \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \varphi_k, \psi_n \rangle \cdot \varphi_k$.

Damit erhält man ein Orthonormalsystem (φ_n) mit $\text{lin}\{\psi_i : 1 \leq i \leq n\} = \text{lin}\{\varphi_i : 1 \leq i \leq n\}$ für alle n , insbesondere ist $\text{lin}\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\} = \text{lin}\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ und diese Menge ist dicht in \mathcal{H} . Also ist (φ_n) eine Orthonormalbasis gemäß Satz 21.13. ■

Bemerkung

1. \mathcal{H} ist genau dann separabel, wenn \mathcal{H} eine *abzählbare* Orthonormalbasis besitzt. (Gezeigt ist bis jetzt nur die eine Richtung in Form des Beweises zum Satz 21.13, die andere Richtung kann man sich leicht selbst überlegen.)
2. In einem separablen Hilbertraum ist jede Orthonormalbasis abzählbar; generell sind in jedem Hilbertraum alle Orthonormalbasen gleichmächtig. Die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis (also aller Orthonormalbasen) nennt man die **Hilbertraumdimension** von \mathcal{H} .

Eine Orthonormalbasis im unendlichdimensionalen Hilbertraum ist keine Basis im Sinne der linearen Algebra, also keine **algebraische Basis**. Ist (φ_n) also eine Orthonormalbasis, dann kann man nicht alle $\varphi \in \mathcal{H}$ als *endliche* Linearkombination von φ_n darstellen.

3. Eine Orthonormalbasis ist stets ein maximales Orthonormalsystem. Das heißt: Ist (φ_n) eine Orthonormalbasis, so folgt aus $\langle \varphi, \varphi_n \rangle = 0 \forall n$ stets $\varphi = 0$.

Beachte: Ist $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ dicht mit $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{D}$, dann folgt $\varphi = 0$, denn dass \mathcal{D} dicht in \mathcal{H} ist, heißt, dass eine Folge (ψ_n) aus \mathcal{D} existiert, die gegen φ konvergiert. Dann ist $\langle \varphi, \psi_n \rangle = 0$ für alle n , also verschwindet auch der Grenzwert:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, \psi_n \rangle = \left\langle \varphi, \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \right\rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle \Rightarrow \varphi = 0$$

Der einzige problematische Punkt ist die zweite Umformung, bei der der Grenzwert in das Skalarprodukt gezogen wird. Das geht aber wegen:

$$|\langle \varphi, \psi_n \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle| = |\langle \varphi, \psi_n - \varphi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

Diese Eigenschaft entspricht gerade der Stetigkeit des Skalarprodukts in der zweiten Komponente.

4. Wie in der linearen Algebra gilt: Ist (ψ_n) ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} , dann kann man (ψ_n) immer zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Betrachte den von den (ψ_n) aufgespannten Unterraum \mathcal{H}_1 von \mathcal{H} . Dann ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$. Nach unserem Satz besitzt auch der Hilbertraum \mathcal{H}_1^\perp eine Orthonormalbasis (ψ'_n) . Irgendeine Abzählung (φ_n) der Menge $\{\psi_n\} \cup \{\psi'_n\}$ ist dann wieder eine Orthonormalbasis in \mathcal{H} .

Das folgende Resultat ist fundamental: Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Dann ist \mathcal{H}' der Raum der linearen stetigen Funktionale auf \mathcal{H} . Die Funktion $f \in \mathcal{H}'$ bildet von \mathcal{H} nach \mathbb{C} ab und hat die folgenden Eigenschaften:

1. f ist linear, d.h. $f(c \cdot \varphi + d \cdot \psi) = c \cdot f(\varphi) + d \cdot f(\psi)$ für alle $c, d \in \mathbb{C}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.
2. f ist stetig, das heißt, wenn φ_n in \mathcal{H} gegen φ konvergiert, dann geht $f(\varphi_n)$ in \mathbb{C} gegen $f(\varphi)$.

Wir werden später bei linearen Abbildungen von \mathcal{H} nach \mathbb{K} allgemein zeigen, dass die obige Stetigkeit äquivalent ist zu der Abschätzung:

$$|f(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad C > 0 \text{ fest}$$

Ist diese Abschätzung erfüllt, so ist f stetig, denn wenn φ_n gegen φ konvergiert, dann auch $f(\varphi_n)$ gegen $f(\varphi)$ wegen:

$$|f(\varphi_n) - f(\varphi)| = |f(\varphi_n - \varphi)| \leq C \cdot \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

Beispiel 21.2 für lineare stetige Funktionale auf \mathcal{H}

Sei $\psi \in \mathcal{H}$ fest. Setze $f_\psi(\varphi) := \langle \psi, \varphi \rangle$. Dann ist f_ψ linear, und wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auch stetig:

$$|f_\psi(\varphi)| = |\langle \psi, \varphi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\|$$

Im folgenden Theorem werden wir sehen, dass es keine weiteren linearen stetigen Funktionale auf \mathcal{H} gibt. In \mathcal{H}' definieren wir vorher eine Norm:

$$\|f\|' := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |f(\varphi)| \quad \forall f \in \mathcal{H}'$$

Theorem 21.15 Satz von Riesz

Jedes $f \in \mathcal{H}'$ hat die Form

$$f = f_\psi = \langle \psi, \cdot \rangle$$

mit einem eindeutig bestimmten $\psi \in \mathcal{H}$. Die Abbildung $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ mit $\psi \mapsto f_\psi$ ist eine bijektive, konjugiert-lineare und isometrische Abbildung, das heißt:

$$\|\psi\| = \|J\psi\|' = \|f\|'$$

Bemerkung

Dass J konjugiert linear ist, heißt:

$$J(\varphi + \psi) = J\varphi + J\psi \quad \text{und} \quad J(c\varphi) = \bar{c} \cdot J\varphi \quad \forall c \in \mathbb{C} \text{ und } \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Beweis

Die Injektivität ist klar, denn $J\varphi = f = 0$ heißt, dass $f(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = 0$ für alle φ ist, woraus $\psi = 0$ folgt. Es ist nur zu zeigen, dass J surjektiv ist, was der eigentliche Inhalt des Theorems ist.

Sei o.E.d.A. $f \neq 0$ (für $f = 0$ kann man $\psi = 0$ wählen). Dann ist Kern $f = \{\varphi \in \mathcal{H} : f(\varphi) = 0\}$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} . (Ein Unterraum ist es, weil f linear ist; die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit von f , denn Kern $f = f^{-1}(\{0\})$ und $\{0\}$ ist abgeschlossen.)

Da $f \neq 0$ ist, ist $(\text{Kern } f)^\perp \neq \{0\}$. Außerdem hat $(\text{Kern } f)^\perp$ die Dimension 1. Sei nun $\psi_0 \in (\text{Kern } f)^\perp$ mit $\|\psi_0\| = 1$. Dann sei ein Element χ_φ mit $\varphi \in \mathcal{H}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi &:= f(\psi_0) \cdot \varphi - f(\varphi) \cdot \psi_0 \\ \Rightarrow f(\chi_\varphi) &= f(\psi_0) \cdot f(\varphi) - f(\varphi) \cdot f(\psi_0) = 0 \\ \Rightarrow 0 &= \langle \psi, \chi_\varphi \rangle = \langle \psi_0, f(\psi_0) \cdot \varphi - f(\varphi) \cdot \psi_0 \rangle = f(\psi_0) \cdot \langle \psi_0, \varphi \rangle - f(\varphi) \cdot \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{=1} \\ \Rightarrow f(\varphi) &= f(\psi_0) \cdot \langle \psi_0, \varphi \rangle \\ f(\varphi) &= \left\langle \overline{f(\psi_0)} \cdot \psi_0, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\psi := \overline{f(\psi_0)} \cdot \psi_0$:

$$f(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Damit ist die Existenz eines ψ gezeigt (und implizit eine Konstruktionsvorschrift für ψ aus f erstellt worden). Es muss noch die Eindeutigkeit gezeigt werden: Sei f wie oben darstellbar mit $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$, also $f(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \psi', \varphi \rangle$. Dann ist $\langle \psi - \psi', \varphi \rangle = 0$ für alle φ , also ist $\psi - \psi' = 0$.

Jetzt werden die Eigenschaften von J untersucht. Seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ beliebig und $c \in \mathbb{C}$ beliebig:

$$\begin{aligned} J(\psi_1 + \psi_2)(\varphi) &= \langle \psi_1 + \psi_2, \varphi \rangle = \langle \psi_1, \varphi \rangle + \langle \psi_2, \varphi \rangle = J\psi_1(\varphi) + J\psi_2(\varphi) \\ J(c \cdot \psi_1)(\varphi) &= \langle c \cdot \psi_1, \varphi \rangle = \bar{c} \cdot \langle \psi_1, \varphi \rangle = \bar{c} \cdot J\psi_1(\varphi) \end{aligned}$$

Da die Äquivalenz von Funktionen punktweise definiert ist, folgt hieraus $J(\psi_1 + \psi_2) = J\psi_1 + J\psi_2$ und $J(c \cdot \psi_1) = \bar{c} \cdot J\psi_1$. Zur Isometrie:

$$\|J\psi\|' = \|f_\psi\|' = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |f_\psi(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \psi, \varphi \rangle| = \|\psi\|$$

Der letzte Schritt ist richtig, weil:

- $\|\psi, \varphi\| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\| \leq \|\psi\|$, also ist $\{\langle \psi, \varphi \rangle : \|\varphi\| \leq 1\}$ durch $\|\psi\|$ beschränkt.
- Für $\varphi := \psi / \|\psi\|$ ist $\langle \psi, \varphi \rangle = \|\psi\|$, also muss dies mit obiger Beschränktheit das Supremum sein.

■

22 Beschränkte lineare Operatoren

22.1 Allgemeine Eigenschaften. Beispiele

Etliche Definitionen und Betrachtungen könnten auch in normierten bzw. Banachräumen durchgeführt werden. Als Vereinfachung betrachten wir aber stets nur lineare Operatoren im gleichen Hilbertraum (also in der Regel nicht zwischen verschiedenen Hilberträumen).

Definition 22.1

Ein **linearer Operator** A im Hilbertraum \mathcal{H} ist eine auf einem linearen Teilraum $\mathcal{D}(A)$ definierte lineare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- $\mathcal{D}(A)$ heißt **Definitionsbereich** von A .
- $\text{im } A = \{A\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$ heißt **Wertebereich** von A .
- $\text{Kern } A = \{\varphi \in \mathcal{D}(A) : A\varphi = 0\}$ heißt **Kern** bzw. **Nullraum** von A .
- $G(A) = \{(\varphi, A\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ heißt **Graph** von A .
- A heißt **dicht definiert**, wenn $\mathcal{D}(A)$ in \mathcal{H} dicht liegt.

Bemerkung

1. Der Begriff der Linearität ist wie üblich definiert, also $A(c \cdot \varphi + d \cdot \psi) = c \cdot A\varphi + d \cdot A\psi$ für alle $c, d \in \mathbb{C}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$.
2. Da wir *nur lineare* Operatoren betrachten, sprechen wir einfach von Operatoren.
3. A und $\mathcal{D}(A)$ gehören *immer* zusammen!
4. $G(A)$ ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.
5. Wir betrachten nur dicht definierte Operatoren; in den folgenden Sätzen wird im Allgemeinen $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ sein.

Beispiele

1. Sei der Operator Q gegeben durch $(Qf)(x) := x \cdot f(x)$. Das ist nur eine Vorschrift, wie der Operator formal wirken soll. Q wirkt auch linear. Um aus Q einen linearen Operator mit zu bestimmenden Eigenschaften zu machen, braucht man einen Raum, in dem er wirkt, und einen geeigneten Definitionsbereich. A priori ist diese Wahl nicht klar; sie hängt von der Aufgabenstellung ab.

Sei zum Beispiel $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ und $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{H}$. Zu prüfen ist, ob Q von \mathcal{H} nach \mathcal{H} abbildet: Sei $f \in L^2[a, b]$. Liegt auch $Qf \in L^2[a, b]$?

$$\int_a^b |Qf(x)|^2 dx = \int_a^b |x \cdot f(x)|^2 dx = \int_a^b |x|^2 \cdot |f(x)|^2 dx \leq \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} |x|^2}_{< \infty} \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 dx}_{< \infty} < \infty$$

Für $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ ist durch Q und $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{H}$ also ein linearer Operator definiert. Aus obiger Herleitung kann man schon erahnen, dass das für $\mathcal{H} = \mathcal{D}(Q) = L^2(\mathbb{R})$ nicht der Fall ist (der Beweis ist noch etwas schwieriger). Im $L^2(\mathbb{R})$ gibt es für $\mathcal{D}(Q)$ aber viele Varianten, zum Beispiel $\mathcal{D}(Q) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ oder $\mathcal{D}(Q) := \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Der maximale Definitionsbereich ist offensichtlich

$$\mathcal{D}(Q) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Q ist der typische **Ortsoperator** der Quantenmechanik.

2. Sei $P := 1/i \cdot d/dx$, also $Pf = f'/i$. (Das $1/i$ ist später von fundamentaler Bedeutung für die Eigenschaften des Operators.) Dieser Operator kann zum Beispiel im $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ benutzt werden, aber nie für $\mathcal{D}(P) = \mathcal{H}$, da nicht alle Elemente von \mathcal{H} differenzierbar sind. Möglich sind $\mathcal{D}(P) = C^1[a, b]$, der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$, oder auch

$$\mathcal{D}(P) = \{f \in L^2[a, b] : f' \text{ existiert und } f' \in L^2[a, b]\}$$

Für $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ sind möglich: $\mathcal{D}(P) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ oder $\mathcal{D}(P) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ oder

$$\mathcal{D}(P) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \text{ existiert und } f' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

P ist der typische **Impulsoperator** der Quantenphysik (bis auf einen Faktor \hbar).

3. Sei $\mathcal{H} = l^2$ und (a_n) eine beliebige Folge aus \mathcal{C} . Der Definitionsbereich für den Operator A sei

$$\mathcal{D}(A) = \{(x_n) \in l^2 : (a_n \cdot x_n) \in l^2\} = \left\{ (x_n) \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot x_n|^2 < \infty \right\}$$

Der Operator A ist gegeben durch $A(x_n) := (a_n \cdot x_n)$ für alle $x = (x_n) \in \mathcal{D}(A)$. Diese Operation entspricht gerade der Multiplikation des Spaltenvektors mit den Folgeelementen mit einer Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ a_n \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Deswegen heißt A **Diagonaloperator**. $\mathcal{D}(A)$ liegt dicht in l^2 , denn die abzählbaren Folgen liegen alle in $\mathcal{D}(A)$.

4. Die **Verschiebungsoperatoren** oder **Shift-Operatoren** sind für $\mathcal{H} = \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(L) = l^2$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} Rx &= R(x_n) := (0, x_1, x_2, \dots) \\ Lx &= L(x_n) := (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Im endlichdimensionalen Fall ist es sinnvoll, von der Menge aller linearen Operatoren auf einem Vektorraum zu sprechen und Eigenschaften dieser Menge zu untersuchen. Im unendlichdimensionalen Fall gibt es für beliebige lineare Operatoren keine vernünftigen Sätze, wegen zu vieler pathologischer Fälle. Deswegen arbeitet man mit „vernünftigen“ Klassen linearer Operatoren.

Zur Wiederholung: Eine Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ heißt beschränkt, wenn es ein $D > 0$ gibt mit $\|\varphi\| \leq D$ für alle $\varphi \in M$. Geometrisch gesprochen bedeutet das, dass M in einer hinreichend großen Kugel um den Mittelpunkt 0 mit dem endlichen Radius D liegt.

Definition 22.2

Sei $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. A heißt:

- **beschränkt**, wenn A beschränkte Mengen aus $M \subset \mathcal{D}(A)$ in beschränkte Mengen AM abbildet.
- **stetig**, wenn für eine beliebige Folge (φ_n) aus $\mathcal{D}(A)$ gilt: Aus $\varphi_n \rightarrow \varphi$ folgt $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$. (Das ist eigentlich nur die Stetigkeit in φ ; diese Relation soll für alle $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ gelten.)

Satz 22.3

Sei $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist beschränkt.
2. Es existiert ein $C > 0$ mit $\|A\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(A)$.
3. A ist stetig (d.h. in jedem $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ stetig).
4. A ist in $0 \in \mathcal{D}(A)$ stetig.

Beweis

Aus 3. folgt 4.: Das ist mehr als nur trivial.

Aus 2. folgt 3.: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ und (φ_n) eine Folge aus $\mathcal{D}(A)$ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

$$\|A\varphi_n - A\varphi\| = \|A(\varphi_n - \varphi)\| \leq C \cdot \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

Daraus folgt $A\varphi_n \rightarrow A\varphi$.

Aus 2. folgt 1.: Sei $M \subset \mathcal{D}(A)$ beschränkt, also ist $\|\varphi\| \leq D$ für alle $\varphi \in M$. Dann ist:

$$\|A\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\| \leq C \cdot D \quad \forall \varphi \in M$$

Deswegen ist auch AM beschränkt.

Aus 1. folgt 2.: Wir zeigen gleichzeitig, dass aus Aussage 4 die Aussage 2 folgt, indem gezeigt wird, dass, wenn Aussage 2 nicht gilt, die Aussagen 1 und 4 nicht gelten können. Wenn 2. nicht gilt, dann existiert zu jedem $C > 0$ ein $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ mit $\|A\varphi\| > C \cdot \|\varphi\|$. Dies spezialisieren wir auf natürliche Zahlen ($C = 1, 2, \dots$): Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\varphi_n \in \mathcal{D}(A)$ mit $\|A\varphi_n\| > C \cdot \|\varphi_n\|$. Betrachte nun die Folge (ψ_n) mit

$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\| \cdot \sqrt{n}} \in \mathcal{D}(A) \quad \Rightarrow \quad \|\psi_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Also geht $\psi_n \rightarrow 0$ und $\{\psi_n\}$ ist beschränkt, aber:

$$\|A\psi_n\| = \frac{\|A\varphi_n\|}{\|\varphi_n\| \cdot \sqrt{n}} > \frac{n \cdot \|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\| \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Also geht $A\varphi_n \not\rightarrow 0$, somit ist $\{A\psi_n\}$ nicht beschränkt, was ein Widerspruch zu 1. und 4. ist. ■

Somit können in Zukunft Beschränktheit und Stetigkeit synonym verwendet werden.

Bemerkung

Wenn A auf einem dichten Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ stetig ist, dann lässt sich A zu einem stetigen Operator auf ganz \mathcal{H} fortsetzen.

In Zukunft seien beschränkte Operatoren stets auf ganz \mathcal{H} definiert, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sei die Menge aller beschränkten/stetigen linearen Operatoren von \mathcal{H} in \mathcal{H} bezeichnet. In $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni T$ ist eine Norm gegeben durch:

$$\|T\| := \inf \{C > 0 : \|T\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}\} \quad (22.1)$$

Bemerkung

Laut der Infimumsdefinition gilt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\varphi \in \mathcal{H}$: $\|T\varphi\| \leq (\|T\| + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man die sehr wichtige Abschätzung:

$$\|T\varphi\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi\| \quad (22.2)$$

Lemma 22.4

Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{\|T\varphi\| : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1\} \\ \|T\| &= \sup \{\|T\varphi\| : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1\} \\ \|T\| &= \sup \{\|T\varphi\| : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| < 1\} \\ \|T\| &= \sup \{|\langle \psi, T\varphi \rangle| : \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1, \|\psi\| \leq 1\} \end{aligned}$$

Beweis

Die 4 Suprema werden (von oben nach unten) mit N_1 bis N_4 bezeichnet. Zu zeigen ist $N_1 = \dots = N_4 = \|T\|$. Es gilt folgende (leicht selber beweisbare) Gleichung:

$$\sup_{\|\chi\| \leq 1} |\langle \varrho, \chi \rangle| = \|\varrho\|$$

Damit sieht man unmittelbar $N_4 = N_1$. Aus (22.2) folgt:

$$\|T\varphi\| \leq \|T\| \quad \forall \varphi : \begin{cases} \|\varphi\| \leq 1 \\ \|\varphi\| = 1 \\ \|\varphi\| < 1 \end{cases}$$

Also ist $N_1, N_2, N_3 \leq \|T\|$. Trivial ist zudem $N_1 \geq N_2, N_3$ (da die Mengen in N_2 und N_3 Teilmengen der Menge in N_1 sind). Wir zeigen nun $N_3 \leq N_2$: Für $\varphi = 0$ ist $\|T\varphi\| = 0 \leq N_2$. Für $0 < \|\varphi\| < 1$ betrachte $\psi := \varphi / \|\varphi\|$, also $\|\psi\| = 1$.

$$\|T\psi\| = \frac{1}{\|\varphi\|} \cdot \|T\varphi\| \leq \|T\varphi\| \quad \Rightarrow \quad N_2 \geq N_3$$

Insgesamt gilt also $N_3 \leq N_2 \leq N_1 \leq \|T\|$. Jetzt zeigen wir: $\|T\| \leq N_3$, dann ist der Beweis erbracht. Es sei o.E.d.A. $T \neq 0$, also $\|T\| > 0$. Wegen (22.1) existiert zu jedem $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $\varphi \neq 0$ mit:

$$\|T\varphi\| > \underbrace{(1 - \varepsilon) \cdot \|T\|}_{< \|T\|} \cdot \|\varphi\|$$

Dann gilt für $\psi := \frac{1}{(1+\varepsilon) \cdot \|\varphi\|} \cdot \varphi$ mit $\|\psi\| < 1$:

$$\|T\psi\| = \frac{1}{(1 + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|} \cdot \|T\varphi\| > \frac{(1 - \varepsilon) \cdot \|\varphi\|}{(1 + \varepsilon) \cdot \|\varphi\|} \cdot \|T\| \quad \Rightarrow \quad N_3 \geq \|T\psi\| > \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \|T\|$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt $N_3 \geq \|T\|$. ■

Satz 22.5

$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum, in dem zusätzlich gilt:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Beweis

Mithilfe der Abschätzung (22.2) folgt die positive Definitheit sofort. Die Homogenität und die Dreiecksungleichung sind ebenfalls einfach. Zur Multiplikativität:

$$\|A \cdot B\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A(B\varphi)\| \leq (22.2) \leq \|A\| \cdot \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|B\varphi\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist natürlich ein Vektorraum, denn Linearkombinationen stetiger linearer Abbildungen sind wieder stetig und linear. Zu zeigen ist noch, dass $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ vollständig ist. Sei (T_n) eine $\|\cdot\|$ -Cauchyfolge aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Wir zeigen, dass es ein $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gibt mit $T_n \rightarrow T$ (bezüglich $\|\cdot\|$).

(T_n) ist eine Cauchyfolge, also gilt: $\|T_n - T_m\| \rightarrow 0$ für $m, n \rightarrow \infty$. Damit ist für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ die Folge $(T_n\varphi)$ eine Cauchyfolge in \mathcal{H} , denn:

$$\|T_n\varphi - T_m\varphi\| \leq (22.2) \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|\varphi\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty$$

Da \mathcal{H} vollständig ist, existiert ein $\psi \in \mathcal{H}$ mit $T_n\varphi \rightarrow \psi$. Definiere nun T durch $T\varphi := \psi$. An T stellen wir folgende Forderungen:

- T muss linear sein.

$$T(a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a \cdot \varphi_1 + b \cdot \varphi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a \cdot T_n\varphi_1 + b \cdot T_n\varphi_2] = a \cdot T\varphi_1 + b \cdot T\varphi_2$$

- T muss stetig sein. Da (T_n) eine Cauchyfolge ist, ist auch $(\|T_n\|)$ eine Cauchyfolge, denn:

$$\| \|T_n\| - \|T_m\| \| \leq \|T_n - T_m\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty$$

Außerdem ist $(\|T_n\|)$ beschränkt, d.h. es existiert ein $K > 0$ mit $\|T_n\| \leq K$ für alle n . Benutze die Stetigkeit der Norm:

$$\|T\varphi\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n\varphi \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\varphi\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|\varphi\| \leq K \cdot \|\varphi\|$$

Da Stetigkeit und Beschränktheit bei linearen Operatoren zusammenfallen, ist T also stetig.

- T_n muss bezüglich $\|\cdot\|$ gegen T konvergieren, also $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein n_0 , sodass für alle $m, n > n_0$ gilt:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|(T_n - T)\varphi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)\varphi\| \leq \varepsilon \cdot \|\varphi\|$$

Nach der Charakterisierung der Operatornorm ist $\|T_n - T\| < \varepsilon$, also konvergiert $T_n \rightarrow T$. ■

Bemerkung

Betrachtet man lineare Operatoren, die von \mathcal{H} in einen anderen Raum \mathcal{K} abbilden, so muss \mathcal{K} vollständig sein. Die Vollständigkeit von \mathcal{H} braucht man für diesen Satz nicht.

Beispiel 22.1 Integraloperatoren

Sei $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ und $k \in C([a, b] \times [a, b])$. Für $\varphi \in L^2[a, b]$ setze

$$K\varphi : (K\varphi)(x) := \int_a^b k(x, y) \cdot \varphi(y) \, dy$$

$F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt **endlichdimensional** oder **von endlichem Rang**, wenn F endlichdimensional ist. Die Menge aller endlichdimensionalen Operatoren sei $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Beispiel 22.2 Endlichdimensionale Operatoren

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{H}$ beliebig fest. Setze:

$$F := \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \cdot \rangle \cdot \psi_i$$

F ist höchstens n -dimensional (die Dimension wird kleiner als n , wenn die ψ_1, \dots, ψ_n linear abhängig sind). Präzise formuliert ist $\dim F = \dim \text{lin} \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$.

Bemerkung

zum inversen Operator

Wenn ein Operator $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \text{im } A$ injektiv ist, d.h. (da A linear ist) $\text{Kern } A = \{0\}$, dann existiert ein inverser Operator $A^{-1} : \text{im } A \rightarrow \mathcal{D}(A)$, der wiederum linear ist. Aber: A^{-1} braucht weder dicht definiert noch auf $\text{im } A$ stetig zu sein.

Ist A beschränkt und bijektiv (das heißt $\text{im } A = \mathcal{H}$), dann ist A^{-1} automatisch beschränkt.

22.2 Der adjungierte Operator

Der Begriff des adjungierten Operators verallgemeinert die hermitesch konjugierte Matrix.

Definition und Satz 22.6

Zu jedem $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existiert genau ein $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^*\varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

T^* ist der zu T **adjungierte Operator**. Es gilt $\|T^*\| = \|T\|$.

Beweis

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, es existieren $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle S_1\varphi, \psi \rangle = \langle S_2\varphi, \psi \rangle$. Dann ist (für alle $\psi \in \mathcal{H}$) $\langle (S_1 - S_2)\varphi, \psi \rangle = 0$, also ist (für alle $\varphi \in \mathcal{H}$) $(S_1 - S_2)\varphi = 0$, also ist $S_1 = S_2$.

Zur Existenz: Für jedes feste $\varphi \in \mathcal{H}$ und ein beliebiges $\psi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$|\langle \varphi, T\psi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|T\psi\| \leq \|\varphi\| \cdot \|T\| \cdot \|\psi\|$$

Also ist $\psi \mapsto \langle \varphi, T\psi \rangle$ ein stetiges lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz existiert genau ein $\psi^* \in \mathcal{H}$ mit $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle \psi^*, \psi \rangle$. Definiere T^* durch $T^*\varphi = \psi^*$. T^* ist linear wegen

$$\langle \varphi_{1,2}, T\psi \rangle = \langle \psi_{1,2}^*, \varphi \rangle = \langle T^*\varphi_{1,2}, \psi \rangle$$

Aus der Eindeutigkeit von ψ^* folgt nun einerseits:

$$\langle \varphi_1 + \varphi_2, T\psi \rangle = \langle T^*(\varphi_1 + \varphi_2), \psi \rangle$$

Andererseits gilt auch:

$$\langle \varphi_1, T\psi \rangle = \langle T^* \varphi_1, \psi \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_1 + \varphi_2, T\psi \rangle = \langle T^* \varphi_1 + T^* \varphi_2, \psi \rangle$$

Die Beschränktheit folgern wir aus dem Vergleich der Normen.

$$\|T^*\| = \sup_{\|\varphi\|, \|\psi\| \leq 1} |\langle \varphi, T^* \psi \rangle| = \sup_{\|\varphi\|, \|\psi\| \leq 1} |\langle T\varphi, \psi \rangle| = \|T\|$$

■

Wie bestimmt man T^* ? Häufig versucht man, T^* aus der Definition von T zu erraten. Dabei hilft die Eindeutigkeit von T .

Beispiel 22.3

Gesucht ist R^* , wobei R der Rechtsshift im l^2 ist:

$$Rx = R(x_n) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Gelte nun $\langle x, Ry \rangle = \langle R^* x, y \rangle$. Setze $R^* x =: z$.

$$\begin{aligned} \langle x, Ry \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i \cdot (Ry)_i = \bar{x}_1 \cdot 0 + \bar{x}_2 \cdot y_1 + \bar{x}_3 \cdot y_2 + \dots \\ \langle R^* x, y \rangle &= \bar{z}_1 \cdot y_1 + \bar{z}_2 \cdot y_2 + \dots \end{aligned}$$

Man liest $z_1 = x_2, z_2 = x_3$ ab. Offensichtlicherweise ist $R^* = L$.

Definition und Satz 22.7

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist bezüglich der Operatornorm und bezüglich der Abbildung $T \mapsto T^*$ eine C^* -**Algebra** mit Einselement. Das heißt:

1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine **Algebra**, also ein Vektorraum mit Multiplikation in sich und Distributivgesetz.
2. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine ***-Algebra**, denn $T \mapsto T^*$ ist eine **Involution**:

$$(c \cdot A + B)^* = \bar{c} \cdot A^* + B^* \quad \text{und} \quad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \quad \text{und} \quad A^{**} = A$$

3. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine **normierte Algebra**, d.h. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist ein normierter Raum mit

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

4. Die Norm erfüllt die **C^* -Eigenschaft** $\|A^* \cdot A\| = \|A\|^2$.
5. Der Einheitsoperator I ist das Einselement der Algebra: $I \cdot A = A \cdot I = A$.

Bemerkung

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist ein Banachraum und deswegen sogar eine Banachalgebra.

Beweis

Der Beweis der ersten Aussage ist einfach, denn $A \cdot B$ ist beschränkt, wenn A und B beschränkt sind. Die dritte Aussage haben wir schon gezeigt, die fünfte ist offensichtlich.

2. beruht wesentlich auf der eindeutigen Bestimmtheit des adjungierten Operators. Exemplarisch wird die zweite Relation betrachtet. Einerseits gilt:

$$\langle \varphi, (A \cdot B)\psi \rangle = \langle (A \cdot B)^* \varphi, \psi \rangle$$

Man kann auch anders umformen:

$$\langle \varphi, A(B\psi) \rangle = \langle A^*\varphi, B\psi \rangle = \langle B^*(A^*\varphi), \psi \rangle = \langle (B^* \cdot A^*)\varphi, \psi \rangle$$

Beide Relationen gelten für alle möglichen φ und ψ , daraus folgt die Behauptung.

4. wird mithilfe der dritten Aussage bewiesen.

$$\|T^* \cdot T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\| \cdot \|T\|$$

Zu zeigen ist die umgekehrte Abschätzung:

$$\|T^* \cdot T\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T^*T\varphi\| = \sup_{\|\varphi\|, \|\psi\| \leq 1} |\langle T^*T\varphi, \psi \rangle| \geq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T^*T\varphi, \varphi \rangle| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T\varphi, T\varphi \rangle| = \|T\|^2$$

■

Lemma 22.8

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ invertierbar in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, d.h. $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann ist auch T^* in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ invertierbar mit:

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Beweis

Betrachte die Adjunktion des Einheitsoperators:

$$I = T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T \quad \Rightarrow \quad I^* = (T^{-1})^* \cdot T^* = T^* \cdot (T^{-1})^* \stackrel{!}{=} I$$

Hieraus folgt, dass $(T^{-1})^*$ gerade das Inverse von T^* sein muss (was aber gerade die Behauptung ist), denn wenn man beide in beliebiger Reihenfolge multipliziert, kommt man auf das Einselement.

■

Häufig benutzt werden die beiden folgenden Sätze.

Satz 22.9

Sei \mathcal{H} ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\langle T\varphi, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$, dann ist $T \equiv 0$.

Bemerkung

Im reellen Hilbertraum gilt dieser Satz nicht. Das klassische Gegenbeispiel ist die Drehung um 90° im \mathbb{R}^2 .

Beweis

Wir zeigen, dass aus der Forderung folgt, dass $\langle T\varphi, \psi \rangle = 0$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ist, dann ist offensichtlich $T \equiv 0$, denn $T\varphi$ steht auf allen Vektoren des Raumes senkrecht, muss also der Nullvektor sein.

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ beliebig. Laut Voraussetzung gilt $\langle T(\varphi + \psi), (\varphi + \psi) \rangle = 0$. Aufgelöst verbleibt:

$$\langle T\varphi, \psi \rangle + \langle T\psi, \varphi \rangle = 0 \quad (*)$$

Nun ersetze ψ durch $i \cdot \psi$:

$$\begin{aligned} \langle T\varphi, i \cdot \psi \rangle + \langle T(i \cdot \psi), \varphi \rangle &= 0 \\ i \cdot \langle T\varphi, \psi \rangle - i \cdot \langle T\psi, \varphi \rangle &= 0 \\ \langle T\varphi, \psi \rangle - \langle T\psi, \varphi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man zu (*) addieren, man erhält $\langle T\varphi, \psi \rangle = 0$. ■

Folgerung 22.10

Sei \mathcal{H} komplex und $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle B\varphi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$, dann ist $A = B$.

Satz 22.11

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt:

$$(\operatorname{im} A)^\perp = \operatorname{Kern} A^* \quad \text{und} \quad (\operatorname{im} A^*)^\perp = \operatorname{Kern} A$$

Bemerkung

Es ist wichtig, wo das orthogonale Komplement steht. Zum Beispiel gilt in Analogie zur ersten Aussage nicht immer $\operatorname{im} A = (\operatorname{Kern} A^*)^\perp$, sondern $\overline{\operatorname{im} A} = (\operatorname{im} A)^{\perp\perp} = (\operatorname{Kern} A^*)^\perp$, denn $\operatorname{im} A$ muss nicht abgeschlossen sein.

Beweis

Die zweite Beziehung folgt aus der ersten mit der Ersetzung $A \rightarrow A^*$.

$$\begin{aligned} (\operatorname{im} A)^\perp &= \{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \chi \rangle = 0 \ \forall \chi \in \operatorname{im} A\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, A\varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{H} : \langle A^*\psi, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{H}\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{H} : A^*\psi = 0\} = \operatorname{Kern} A^* \end{aligned}$$

Definition 22.12

Klassifikation beschränkter Operatoren

Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt:

- **selbstadjungiert**, wenn $A = A^*$ ist.
- **positiv**, wenn $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ ist. (Das impliziert, dass $\langle A\varphi, \varphi \rangle$ immer reell ist!)
- **unitär**, wenn $A^* = A^{-1}$ ist.
- **normal**, wenn $A^* \cdot A = A \cdot A^*$ ist.
- **Projektion**, wenn $A^2 = A$ ist.
- **Orthogonalprojektion**, wenn $A^2 = A$ und $A = A^*$ ist. (Orthogonalprojektionen sind selbstadjungierte Projektionen.)
- **isometrisch** oder **Isometrie**, wenn $\|A\varphi\| = \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ ist..
- **partiell isometrisch**, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ gibt mit: $\operatorname{Kern} A = \mathcal{H}_2$ und $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ ist isometrisch. (Das heißt, der Operator verschwindet auf \mathcal{H}_2 und bildet den \mathcal{H}_1 isometrisch ab.)

Dann heißt \mathcal{H}_1 **Anfangsbereich** von A und $\operatorname{im} A$ heißt **Endbereich** von A .

Bemerkung

1. Selbstadjungierte und unitäre Operatoren sind selbstverständlich normal.

2. Diagonaloperatoren sind stets normal. Sie sind sogar selbstadjungiert, wenn die a_i reell sind.
3. Der Rechtsshiftoperator ist isometrisch. Der Linksshiftoperator ist partiell isometrisch.

Bemerkungen zur Terminologie der Physiker

Die Quantenphysik kennt Zustände, Observable und Zeitentwicklungen eines physikalischen Systems:

- Im einfachsten Falle sind Zustände Einheitsvektoren in einem Hilbertraum. Zum Beispiel betrachtet man im $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ Wellenfunktionen $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\| = 1$.
- Observable entsprechen stets selbstadjungierten Operatoren im entsprechenden Hilbertraum.

Das Problem liegt darin, dass nahezu alle Operatoren in der Quantenmechanik unbeschränkt sind. Für diese Operatoren ist der Begriff des adjungierten Operators etwas komplizierter und es gibt Unterschiede zwischen den Begriffen des symmetrischen und des selbstadjungierten Operators, die es bei beschränkten Operatoren nicht gibt.

Definition und Satz 22.13

Sei T ein auf $\mathcal{D}(T)$ dicht definierter Operator (d.h. $\mathcal{D}(T)$ liegt in \mathcal{H} dicht). Sei weiterhin:

$$\mathcal{D}^* = \{\psi \in \mathcal{H} : \varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T)\}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmter linearer Operator T^* mit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}^*$ und $\langle T^*\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ und $\psi \in \mathcal{D}^* = \mathcal{D}(T^*)$. Dann heißt T^* der zu T **adjungierte Operator**.

Bemerkung

Die in der Definition von \mathcal{D}^* verwendete Abbildung $\varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle$ ist auf jeden Fall linear.

Beweis

Wäre T beschränkt, so hätte man $|\langle \psi, T\varphi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|T\varphi\| \leq \|\psi\| \cdot \|T\| \cdot \|\varphi\|$. Dann wäre obiges lineares Funktional für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ stetig, also wäre $\mathcal{D}^* = \mathcal{H}$.

Wäre T unbeschränkt, dann bedeutet die Stetigkeit von $\varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle$, dass eine (von φ abhängige) Konstante $C > 0$ gibt mit $|\langle \psi, T\varphi \rangle| \leq C \cdot \|\varphi\|$.

Da $\mathcal{D}(T)$ in \mathcal{H} dicht liegt, kann das stetig lineare Funktional $\varphi \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle$ stetig auf ganz \mathcal{H} fortgesetzt werden. Nach Satz von Riesz existiert also genau ein ψ^* mit $\langle \psi^*, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ und $\psi \in \mathcal{D}^*$. Setze $T^*\psi = \psi^*$.

Wie im beschränkten Fall zeigt man die Linearität und Eindeutigkeit. Bei der Eindeutigkeit wird die Dichtheit von $\mathcal{D}(T)$ benutzt. (Denn die oben verwendete Fortsetzung ist, da $\mathcal{D}(T)$ in \mathcal{H} dicht liegt, auch eindeutig.)

Es gibt einige Probleme:

- Im beschränkten Falle war natürlich $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$. Im unbeschränkten Falle muss $\mathcal{D}(T^*)$ keineswegs dicht in \mathcal{H} sein. Im schlimmsten Fall ist $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$.
- Ist $\mathcal{D}(T^*)$ dicht in \mathcal{H} , dann existiert T^{**} auf $\mathcal{D}(T^{**})$. Es gilt zwar $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^{**})$ (somit ist $\mathcal{D}(T^{**})$ stets dicht in \mathcal{H}), aber es muss nicht $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^{**})$ und $T = T^{**}$ sein.

Um die Begriffe im Folgenden genau auseinander zu halten, benötigen wir eine neue Bezeichnung: Ein linearer Operator T heißt **Fortsetzung** des linearen Operators S (welcher umgekehrt **Einschränkung** von T heißt), wenn $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ ist und $S\varphi = T\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ ist. Man schreibt $S \subset T$. Weiterhin nennt man einen Operator T

- **hermitesch**, wenn $\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(T)$ gilt. Hierbei muss $\mathcal{D}(T)$ nicht dicht zu sein. Hermitesche Operatoren bezeichnet man auch also **formal selbstadjungiert**.
- **symmetrisch**, wenn $\mathcal{D}(T)$ dicht und T hermitesch ist. Es ist also $T \subset T^*$.
- **selbstadjungiert**, wenn $T = T^*$ (und folglich $\mathcal{D}(T)$ dicht in \mathcal{H} liegt). Der Unterschied zum symmetrischen Operator besteht darin, dass $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ ist.

Die Begriff des hermiteschen, symmetrischen und selbstadjungierten Operators sind also verschieden, werden aber insbesondere in der Physik meist synonym verwendet, weil Physiker sich im Allgemeinen nicht um Definitionsbereiche kümmern.

22.3 Das Spektrum

Es soll der Begriff des Eigenwertes verallgemeinert werden. Dann ist das Spektrum eines Operatoren im endlichdimensionalen Falle gewissermaßen die Menge der Eigenwerte.

Definition 22.14

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

1. Unter der **Resolventenmenge** von T versteht man:

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \cdot I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$$

Das heißt, $T - \lambda \cdot I$ bildet den \mathcal{H} bijektiv auf sich selbst ab. Der beschränkte Operator $R_\lambda(T) := (T - \lambda \cdot I)^{-1}$ heißt **Resolvente** von T im Punkt λ .

2. Das **Spektrum** von T ist die Menge $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$.

Bemerkung

- Der Begriff des Spektrums wurde 1906 von Hilbert eingeführt.
- Beachte: $\lambda \in \varrho(T)$ heißt, dass $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ existiert und ist auf ganz \mathcal{H} stetig.
- In manchen Büchern sind die Elemente der Menge mit anderem Vorzeichen definiert: $R_\lambda(T) = (\lambda \cdot I - T)^{-1}$

Satz 22.15

1. Für $\lambda, \mu \in \varrho(T)$ kommutieren $R_\lambda(T)$ und $R_\mu(T)$ und es gilt:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) \cdot R_\lambda(T) \cdot R_\mu(T) \quad (22.3)$$

2. Für $|\lambda| > \|T\|$ ist $\lambda \in \varrho(T)$, und es gilt die **Neumannsche Reihenentwicklung**:

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda \cdot I)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \quad (22.4)$$

Ferner hat man die Abschätzung:

$$\|R_\lambda(T)\| = \left\| (T - \lambda \cdot I)^{(-1)} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \quad (22.5)$$

3. Für ein beliebiges $\lambda_0 \in \varrho(T)$ gilt: Falls $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ konvergiert die folgende Reihe:

$$R_{\lambda_0}(T) \cdot \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}(T)^k \right) \quad (22.6)$$

Diese Reihe ist gleich der Resolvente $R_\lambda(T)$. Mithin gehören diese λ zu $\varrho(T)$. Also ist $\varrho(T)$ offen.

Beweis

1. Vertauscht man in (22.3) das λ und das μ , so entsteht:

$$R_\mu(T) - R_\lambda(T) = (\mu - \lambda) \cdot R_\mu(T) \cdot R_\lambda(T)$$

Zusammen mit (22.3) folgt $R_\lambda(T) \cdot R_\mu(T) = R_\mu(T) \cdot R_\lambda(T)$. Das heißt, die Kommutativität folgt sofort aus (22.3). Diese Formel zeigen wir durch identische Umformung: (Betrachte die Operatoren R_λ und R_μ , die von einer Teilmenge des $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ in diesen abbilden.)

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R_\lambda \cdot \underbrace{(T - \mu \cdot I) \cdot R_\mu}_{=I} - \underbrace{R_\lambda \cdot (T - \lambda \cdot I)}_{=I} \cdot R_\mu \\ &= R_\lambda \cdot T \cdot R_\mu - \mu \cdot R_\lambda \cdot R_\mu - R_\lambda \cdot T \cdot R_\mu + \lambda \cdot R_\lambda \cdot R_\mu = (\lambda - \mu) \cdot R_\lambda \cdot R_\mu \end{aligned}$$

2. Wir zeigen zu erst, dass die Reihe in (22.4) bezüglich der Operatornorm konvergiert. Betrachte dazu die Partialsummen $-1/\lambda \cdot \sum_{k=0}^n T^k/\lambda^k$, welche eine Cauchyfolge bilden. Zum Beweis benutze die Dreiecksungleichung: (o.E.d.A. sei $n > m$)

$$\left\| -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^k} + \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=m+1}^n \frac{\|T^k\|}{|\lambda|^k} \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^k$$

Wegen $\|T\| < |\lambda|$ steht hinten ein Teil der konvergenten geometrischen Reihe. Dieser Ausdruck konvergiert für große m und n gegen Null, also existiert ein Operator

$$R := -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^k}$$

Es ist noch zu zeigen, dass $R = R_\lambda(T)$ ist. Das sehen wir durch $R \cdot (T - \lambda \cdot I) = I$.

$$(T - \lambda \cdot I) \cdot R = (T - \lambda \cdot I) \cdot \left[-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right] = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+1}}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = \frac{T^0}{\lambda^0} = I$$

Analog folgt $R \cdot (T - \lambda \cdot I) = I$. Es fehlt noch die Abschätzung (22.5):

$$\|(T - \lambda \cdot I)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^k = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

Wie kommt man nun auf (22.4)? Wir machen eine rein formale Rechnung, die man eigentlich so nicht aufschreiben dürfte:

$$(T - \lambda \cdot I)^{-1} = \frac{1}{T - \lambda \cdot I} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{I - \frac{T}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^k$$

3. Die Reihenentwicklung (22.6) erhält man durch ähnliche Manöver:

$$\begin{aligned} (T - \lambda \cdot I)^{-1} &= \frac{1}{T - \lambda \cdot I} = \frac{1}{T - \lambda_0 \cdot I + \lambda_0 \cdot I - \lambda \cdot I} = \frac{1}{T - \lambda_0 \cdot I} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{\lambda - \lambda_0}{T - \lambda_0 \cdot I}}_{\|\cdot\| < 1}} \\ &= R_{\lambda_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{T - \lambda_0 \cdot I} \right)^k = R_{\lambda_0} \cdot \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{T - \lambda_0 \cdot I} \right)^k \right] \end{aligned}$$

Analog zu den Betrachtungen in 2. folgt auch hier, dass die Reihe in (22.6) konvergiert, denn $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ bedeutet, dass $\|(\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0}\| < 1$ ist, also kann die geometrische Reihe angewendet werden. Wir haben also einen konvergenten Operator:

$$S := R_{\lambda_0} \cdot \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} \left((\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k \right) \right]$$

Wiederum wird $(T - \lambda \cdot I) \cdot S = I$ gezeigt. (Analog folgt $S \cdot (T - \lambda \cdot I) = I$.)

$$\begin{aligned} (T - \lambda \cdot I) \cdot S &= (T - \lambda_0 \cdot I) \cdot S - (\lambda - \lambda_0) \cdot S \\ &= \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k \right] - (\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0} \cdot \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} \left((\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k \right) \right] \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \cdot R_{\lambda_0}^k - (\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0} - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k+1} \cdot R_{\lambda_0}^{k+1} = I \end{aligned}$$

Die Behauptung, dass $\varrho(T)$ offen ist, folgt nach der Definition der offenen Menge. ■

Bemerkung

Die Gleichung (22.6) besagt, dass die Abbildung $\lambda \mapsto R_{\lambda}(T)$ eine analytische Abbildung von $\varrho(T) \subset \mathbb{C}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist. Das heißt, die Resolvente lässt sich um jeden Punkt λ_0 in eine Potenzreihe mit Potenzen von $\lambda - \lambda_0$ mit Koeffizienten aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entwickeln.

Satz 22.16

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann ist $\sigma(T)$ eine nichtleere kompakte Teilmenge des \mathbb{C} mit:

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\} \quad (*)$$

Beweis

Da $\varrho(T)$ offen ist, ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Da alle λ mit $|\lambda| > \|T\|$ zu $\varrho(T)$ gehören, folgt (*), also ist $\sigma(T)$ auch beschränkt und somit kompakt. Der eigentlich schwierige Teil des Beweises ist $\sigma(T) \neq \emptyset$. Den Beweis dafür werden wir in der Funktionentheorie kennenlernen.

Beispiel 22.4

Es können durchaus Punkte aus $\{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$ zu $\varrho(T)$ gehören.

Sei $T = I$ mit $\|T\| = 1$. Es ist $(T - \lambda \cdot I)^{-1} = (I - \lambda \cdot I)^{-1} = I/(1 - \lambda)$. Dieser Operator existiert für alle $\lambda \neq 1$, also ist $\sigma(T) = \{1\}$.

Bevor wir weitere Beispiele für Spektren behandeln, wird $\sigma(T)$ noch in disjunkte Teilmengen zerlegt. Hier muss man mit den uneinheitlichen Bezeichnungen in der Literatur vorsichtig sein.

Definition 22.17

Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ wird $\sigma(T)$ in drei disjunkte Teilmengen zerlegt:

- Das **Punktspektrum** (die Menge der Eigenwerte) ist gegeben durch:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \varphi \in \mathcal{H}, \varphi \neq 0 : T\varphi = \lambda \cdot \varphi\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \cdot I) \text{ ist nicht injektiv}\}$$

- Das **stetige Spektrum** $\sigma_c(T)$ umfasst alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$ in \mathcal{H} dicht liegt und $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ auf $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$ existiert, aber unbeschränkt ist.
- Das **Residualspektrum** $\sigma_r(T)$ enthält alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda \notin \sigma_p(T)$ ist (also ist $T - \lambda \cdot I$ injektiv) und $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$ nicht in \mathcal{H} dicht liegt.

Bemerkung

Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ sind zwei Fälle möglich: $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$ liegt dicht oder nicht dicht in \mathcal{H} .

Der folgende Satz erleichtert oft die Bestimmung des Spektrums von Operatoren.

Satz 22.18

Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt:

1. $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$, damit ist $\varrho(T^*) = \overline{\varrho(T)}$.
2. $(R_\lambda(T))^* = R_{\bar{\lambda}}(T^*)$
3. Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$.

Für $\lambda \in \sigma_r(T)$ ist $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

Für $\lambda \in \sigma_c(T)$ ist $\bar{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$.

Beweis

Für die ersten beiden Aussagen benutze $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, wobei A gerade die Resolvente ist:

$$R_\lambda(T)^* = [(T - \lambda \cdot I)^{-1}]^* = [(T - \lambda \cdot I)^*]^{-1} = [T^* - \bar{\lambda} \cdot I]^{-1} = R_{\bar{\lambda}}(T^*)$$

Aus dieser Beziehung folgt 2. und daraus 1. Die Behauptungen in 3. folgen alle nach dem gleichen Schema; wir zeigen die erste.

$$\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \text{im}(T^* - \bar{\lambda} \cdot I)^\perp = \text{Kern}(T - \lambda \cdot I) \neq \{0\}$$

Folglich kann $(T^* - \bar{\lambda} \cdot I)\mathcal{H}$ nicht dicht sein, also ist $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$.

Spektrum von Diagonaloperatoren

Für eine beschränkte Folge (a_n) ist der Diagonaloperator A auf $\mathcal{H} = l^2$ gegeben durch:

$$Ax = (a_n \cdot x_n)$$

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist der Wertebereich der Folge $n \mapsto a_n$. Stets gilt, dass A normal ist. A ist zudem selbstadjungiert, wenn der Wertebereich der Folge (a_n) reell ist. Das Spektrum von A ist genau $\sigma(A) = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Spektrum von Shiftoperatoren

Der Rechtsshift U und der Linksshift U^* sind auf $\mathcal{H} = l^2$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} Ux &= (0, x_1, x_2, \dots) \\ U^*x &= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Wir benutzen den Satz 22.18. Sei $K := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Wegen $\|U\| = \|U^*\| = 1$ ist $\sigma(U), \sigma(U^*) \subset K$. Betrachte zuerst die Eigenwerte beider Operatoren:

$$Ux = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \quad (0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots)$$

$\lambda = 0$ ist kein Eigenwert, denn es wird ein von Null verschiedener Eigenvektor gefordert. Sei also $\lambda \neq 0$. Wir vergleichen die Folgeelemente nacheinander:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ x_1 &= \lambda \cdot x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion folgt, dass das Eigenwertproblem nur durch $x = 0$ erfüllt wird. Es gibt also keine Eigenwerte:

$$\sigma_p(U) = \emptyset \quad (22.7)$$

Jetzt untersuchen wir U^* . Das Eigenwertproblem lautet hier:

$$U^*x = \lambda \cdot x \quad \Rightarrow \quad (x_2, x_3, \dots) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots)$$

Wiederum vergleichen wir die Folgen elementweise:

$$x_2 = \lambda \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \lambda \cdot x_2 = \lambda^2 \cdot x_1 \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow \quad x_n = \lambda^{n-1} \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 \cdot (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

Hierbei ist x_1 beliebig. Damit $x \in l^2$ liegt, muss $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 < \infty$ sein. Es folgt, dass $|\lambda| < 1$ sein muss! Das Punktspektrum $\sigma_p(U^*)$ ist also:

$$\sigma_p(U^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \quad (22.8)$$

Da das Spektrum im Einheitskreis liegen muss (wegen der oben erwähnten Beschränkung durch die Norm von U^*) und ein Spektrum immer eine abgeschlossene Menge ist, ist das Spektrum von U^* (und wegen Satz 22.18.1 auch das von U) die gesamte abgeschlossene Einheitsphäre:

$$\sigma(U^*) = K \quad \Rightarrow \quad \sigma(U) = K \quad (22.9)$$

Jetzt wenden wir die erste Implikation aus Satz 22.18.3 auf U^* an.

$$\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(U^{**}) \cup \sigma_r(U^{**}) = \underbrace{\sigma_p(U)}_{=\emptyset} \cup \sigma_r(U) \Rightarrow \{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(U)$$

Es ist also:

$$\sigma_r(U) = \{\lambda : |\lambda| < 1\} \quad (22.10)$$

(22.7), (22.9) und (22.10) zeigen:

$$\sigma_c(U) = \partial K = \{\lambda : |\lambda| = 1\} \quad (22.11)$$

Mit Satz 22.18.3 folgt:

$$\sigma_c(U^*) = \partial K \quad (22.12)$$

Und daraus ergibt sich noch:

$$\sigma_r(U^*) = \emptyset \quad (22.13)$$

Struktur des Spektrums im \mathbb{C}

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist die Kompaktheit des Spektrums (sogar für das Spektrum des Diagonaloperators im l^2).

Satz 22.19

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \exists C > 0 : \|(T - \lambda \cdot I)\varphi\| \geq C \cdot \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad (22.14)$
2. Weyl'sches Kriterium: $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists(\varphi_n), \|\varphi_n\| = 1 : \|(T - \lambda \cdot I)\varphi_n\| \rightarrow 0$
3. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen zueinander orthogonal.
4. $\sigma_r(T) = \emptyset$

Beweis

4. λ ist ein Eigenwert, also reell. Angenommen, es wäre $\lambda \in \sigma_r(T)$. Mit 22.17.3 ist $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^* = T)$. Wegen $\lambda = \bar{\lambda}$ ist das ein Widerspruch, weil dann λ sowohl im Residualspektrum als auch im Punktspektrum liegen würde.

1. Sei $\lambda \in \rho(T)$, d.h. $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ beschränkt:

$$\|(T - \lambda \cdot I)^{-1} \cdot \psi\| \leq D \cdot \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

Setze $\psi := (T - \lambda \cdot I)\varphi$ mit beliebigem $\varphi \in \mathcal{H}$. Dann ist:

$$\|\varphi\| \leq D \cdot \|(T - \lambda \cdot I)\varphi\|$$

Also gilt (22.14) mit $C = 1/D$. Jetzt zeigen wir die Rückrichtung: Es gelte also (22.14). Folglich ist $(T - \lambda \cdot I)$ injektiv, also existiert $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$. Somit ist $\lambda \notin \sigma_p(T)$ (nach Definition). Zudem ist $\lambda \notin \sigma_r(T)$, denn das Residualspektrum ist leer. Es ist also entweder $\lambda \in \sigma_c(T)$ oder $\lambda \in \rho(T)$. In beiden Fällen muss $(T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$ dicht in \mathcal{H} sein. Wir zeigen jetzt, dass $\text{im}(T - \lambda \cdot I) = (T - \lambda \cdot I)\mathcal{H}$

abgeschlossen ist (und damit gerade \mathcal{H} ist). (Denn dann wäre das Inverse auf ganz \mathcal{H} definiert. Setze dann in (22.14) $\varphi = (T - \lambda \cdot I)^{-1}\psi$ mit beliebigem $\psi \in \mathcal{H}$. Daraus folgt, dass $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ beschränkt ist. Also wäre $\lambda \in \varrho(T)$.)

Wir zeigen also nun, dass $\text{im}(T - \lambda \cdot I)$ abgeschlossen ist. Sei $\psi_n = (T - \lambda \cdot I)\varphi_n \in \text{im}(T - \lambda \cdot I)$ und $\psi_n \rightarrow \psi \in \mathcal{H}$. (ψ_n) konvergiert, ist also eine Cauchyfolge. Es ist also $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi_m\| = 0$.

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|(T - \lambda \cdot I)(\varphi_n - \varphi_m)\| \geq (22.14) \geq C \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\|$$

Daraus sehen wir, dass (φ_n) auch eine Cauchyfolge und (wegen der Vollständigkeit von \mathcal{H} auch konvergent ist). Der Grenzwert heiße $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$. Da $(T - \lambda \cdot I)$ stetig ist, folgt $(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow (T - \lambda \cdot I)\varphi$ oder $\psi_n \rightarrow \psi = (T - \lambda \cdot I)\varphi$. Damit liegt das $\psi \in \text{im}(T - \lambda \cdot I)$.

2. Als erstes zeigen wir die Rückrichtung. Die Bedingung des Weylschen Kriteriums impliziert, dass $T - \lambda \cdot I$ kein stetiges Inverses haben kann: Wenn $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ stetig wäre, dann würde gelten:

$$(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad (T - \lambda \cdot I)^{-1}[(T - \lambda \cdot I)\varphi_n] = \varphi_n \rightarrow 0$$

Das ist wegen $\|\varphi_n\| = 1$ nicht möglich. Jetzt die Hinrichtung: Da $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ (beachte 22.19.4), kann man beide Teile getrennt betrachten:

- Sei $\lambda \in \sigma_p(T)$, also existiert ein $\varphi \neq 0$ (o.E.d.A. $\|\varphi\| = 1$) mit $T\varphi = \lambda \cdot \varphi$, also $(T - \lambda \cdot I)\varphi = 0$. Dann erfüllt (φ_n) mit $\varphi_n = \varphi \forall n$ die Bedingung des Satzes.
- Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$, folglich ist $(T - \lambda \cdot I)^{-1}$ unbeschränkt. Es muss also eine Folge (ψ_n) mit $\psi_n \in \mathcal{D}((T - \lambda \cdot I)^{-1})$ existieren, damit ist $\psi_n =: (T - \lambda \cdot I)\varphi'_n \in \text{im}(T - \lambda \cdot I)$ und $\|\psi_n\| = 1$. Außerdem sei $\|(T - \lambda \cdot I)^{-1}\psi_n\| \rightarrow \infty$, also $\|\varphi'_n\| \rightarrow \infty$.
Setze $\varphi_n := \varphi'_n / \|\varphi'_n\|$, damit $\|\varphi_n\| = 1$ wird. Zudem gilt:

$$\|(T - \lambda \cdot I)\varphi_n\| = \frac{\|(T - \lambda \cdot I)\varphi'_n\|}{\|\varphi'_n\|} = \frac{\|\psi_n\|}{\|\varphi'_n\|} = \frac{1}{\|\varphi'_n\|} \rightarrow 0$$

3. Der zweite Teil der Aussage wird in der linearen Algebra gezeigt. Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\beta \neq 0$. Wir zeigen $\lambda \in \varrho(T)$ mittels der ersten Aussage.

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda \cdot I)\varphi\|^2 &= \|(T\varphi - \alpha\varphi) - i\beta\varphi\|^2 \\ &= \langle (T\varphi - \alpha\varphi) - i\beta\varphi, (T\varphi - \alpha\varphi) - i\beta\varphi \rangle \\ &= \|(T - \alpha \cdot I)\varphi\|^2 + \beta^2 \cdot \|\varphi\|^2 \geq \beta^2 \cdot \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

Hierbei fallen die gemischten Glieder weg, weil T selbstadjungiert ist. Wegen der letzten Abschätzung liegt $\lambda \in \varrho(T)$. Also ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. ■

Satz 22.20

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann gehört $\|T\|$ oder $-\|T\|$ zu $\sigma(T)$.

Beweis

Sei $r = \|T\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T\varphi\|$. Daraus erkennt man, dass eine Folge (φ_n) existiert mit:

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \|T\varphi_1\| \leq \|T\varphi_2\| \leq \dots \quad \text{und} \quad \|T\varphi_n\| \rightarrow r$$

Betrachte nun eine neue Folge: (beachte, dass T selbstadjungiert ist)

$$\begin{aligned}\|(T^2 - r^2 \cdot I)\varphi_n\|^2 &= \langle (T^2 - r^2 \cdot I)\varphi_n, (T^2 - r^2 \cdot I)\varphi_n \rangle = \|T^2\varphi_n\|^2 - 2r^2 \cdot \langle \varphi_n, T^2\varphi_n \rangle + r^4 \cdot \|\varphi_n\|^2 \\ &= \|T(T\varphi_n)\|^2 - 2r^2 \cdot \|T\varphi_n\|^2 + r^4 \leq \|T\|^2 \cdot \|T\varphi_n\|^2 - 2r^2 \cdot \|T\varphi_n\|^2 + r^4 \\ &\rightarrow \|T\|^2 \cdot \|T\|^2 - 2r^2 \cdot \|T\|^2 + r^4 = 0\end{aligned}$$

Nach Weyl ist $r^2 \in \sigma(T^2)$, d.h. $\|T\|^2 \in \sigma(T^2)$. Deswegen hat $T^2 - r^2 \cdot I = (T - r \cdot I)(T + r \cdot I)$ kein beschränktes Inverses, also entweder $T + r \cdot I$ oder $T - r \cdot I$. Somit ist entweder $r \in \sigma(T)$ oder $-r \in \sigma(T)$. ■

23 Kompakte Operatoren

23.1 Definition. Erste Eigenschaften

Zur Wiederholung: Eine Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ heißt **kompakt**, wenn jede Folge $(\psi_n) \subset M$ eine Teilfolge (ψ_{n_k}) besitzt, die gegen ein Element *aus* M konvergiert. M heißt **relativ kompakt**, wenn \overline{M} kompakt ist. Das heißt: Jede Folge $(\psi_n) \subset M$ enthält eine Teilfolge (ψ_{n_k}) , die *in* \mathcal{H} konvergiert.

Definition 23.1 Kompakter Operator

Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt **kompakt**, wenn er beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet. Äquivalent ist folgendes Kriterium: Jede beschränkte Folge $(\psi_n) \subset \mathcal{H}$ enthält eine Teilfolge (ψ_{n_k}) , für die $(T\psi_{n_k})$ konvergiert. (Sprich: $(T\psi_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge.) Mit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ sei die Menge der kompakten Operatoren auf \mathcal{H} bezeichnet.

Bemerkung

In \mathbb{C}^n bzw \mathbb{R}^n sind kompakte Mengen dasselbe wie beschränkte und abgeschlossene Mengen. Im unendlichdimensionalen Hilbertraum gilt nur, dass kompakte Mengen immer beschränkt und abgeschlossen sind. Die andere Richtung der Implikation gilt nicht. (Ein sehr wichtiges Beispiel ist die Einheitskugel.)

Lemma 23.2

Kompakte Operatoren sind immer beschränkt: $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Beweis

Relativ kompakte Mengen sind stets beschränkt, denn: Wenn \mathcal{N} relativ kompakt, dann folgt, dass $\overline{\mathcal{N}}$ kompakt und damit beschränkt ist. Deswegen ist $\mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{N}}$ auch beschränkt. Sei nun also $M \subset \mathcal{H}$ beschränkt. Daraus folgt, dass TM relativ kompakt und damit beschränkt ist. Es ist also T beschränkt. ■

Lemma 23.3 Vereinfachter Beweis der Kompaktheit

Ein Operator T ist genau dann kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel relativ kompakt ist.

Beweis

Die Bedingung ist notwendig, da da die Einheitskugel beschränkt ist. Ist die Bedingung auch hinreichend? Sei M eine beliebige beschränkte Menge. Dann existiert ein $C > 0$ mit $M \subset C \cdot \mathcal{K}$. Folglich ist $TM \subset T(C \cdot \mathcal{K}) = C \cdot T\mathcal{K}$. Diese Menge ist relativ kompakt. Da Teilmengen relativ kompakter Mengen relativ kompakt sind, ist auch TM relativ kompakt. ■

Definition und Satz 23.4

Die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ bilden ein abgeschlossenes zweiseitiges *****-Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Das heißt:

1. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist ein Vektorraum.
2. Abgeschlossenheit: Eine (gemäß der Operatornorm in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) konvergente Folge $(T_n) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ konvergiert gegen ein $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
3. **Idealeigenschaft:** Für $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind $TS, ST \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
4. **Sterneigenschaft:** Für $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
5. Zusätzlich gilt: Die Menge $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ der endlichdimensionalen Operatoren (sprich: Operatoren mit endlichdimensionalem Bild) ist eine Teilmenge von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, und liegt bezüglich der Operatornorm in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ dicht: $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Bemerkung

Aus 23.4.1 und 23.4.2 folgt, dass $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (als abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes) ein Banachraum ist. Wegen 23.4.3 ist $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ zudem eine Algebra.

Beweis

Nur die zweite Aussage ist etwas umfangreich.

1. Seien S und T aus $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $c \in \mathbb{C}$ und $(\psi_n) \subset \mathcal{H}$ eine beliebige beschränkte Folge. Zu zeigen ist, dass es eine Teilfolge (ψ_{n_k}) gibt, für die $(c \cdot S + T)(\psi_{n_k})$ konvergiert. Weil S kompakt ist, existiert zunächst eine Teilfolge $(\psi_{n_l}) =: (\varphi_l)$, für die $(c \cdot S\varphi_l)$ konvergiert. Da (φ_l) auch beschränkt und T kompakt ist, existiert eine Teilfolge (φ_{l_j}) (welche auch eine Teilfolge von (ψ_n) ist!), für die $(T\varphi_{l_j})$ konvergiert. Als Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert auch $(cS\varphi_{l_j})$ und damit $(c \cdot S + T)(\varphi_{l_j})$. Somit ist $c \cdot S + T$ kompakt.
2. Typisches **Diagonalargument:** Sei (ψ_n) eine beschränkte Folge mit (o.E.d.A.) $\|\psi_n\| \leq 1$. Da T_1 kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(\psi_n^{(1)})$ von (ψ_n) , für die $(T_1\psi_n^{(1)})$ konvergiert. Da $(\psi_n^{(1)})$ beschränkt und T_2 kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(\psi_n^{(2)})$ von $(\psi_n^{(1)})$, deren Bild bezüglich T_2 konvergiert. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Man erhält ein Schema von Folgen(elementen):

$$\begin{array}{cccc}
 \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & \psi_3^{(1)} & \dots \\
 \psi_1^{(2)} & \psi_2^{(2)} & \psi_3^{(2)} & \dots \\
 \psi_1^{(3)} & \psi_2^{(3)} & \psi_3^{(3)} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Dieses Schema hat folgende Eigenschaft: Alle Folgen (in diesem Schema Zeilen) sind Teilfolgen von (ψ_n) und für $k > l$ ist $(\psi_n^{(k)})$ eine Teilfolge von $(\psi_n^{(l)})$. Betrachte nun die Diagonalfolge $(\varphi_n) := \psi_n^{(n)}$ mit den Eigenschaften:

- (a) (φ_n) ist eine Teilfolge von (ψ_n) .
- (b) Für alle l ist (φ_n) ab dem Index l eine Teilfolge von $(\psi_n^{(l)})$.
- (c) Für alle r konvergiert die Folge $(T_r\varphi_n)$.

Zu zeigen ist, dass $(T\varphi_n)$ konvergiert. Es gilt $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und m so groß, dass $\|T - T_m\| < \varepsilon/3$. Wähle nun k_0 so groß, dass $\|T_m\varphi_k - T_m\varphi_l\| < \varepsilon/3$ für alle $k, l > k_0$ (das ist gerade das Cauchy Kriterium).

Beachtet man nun $\|\varphi_n\| \leq 1$ (denn es war $\|\psi_n\| \leq 1$ für alle n), dann gilt für alle $k, l > k_0$:

$$\begin{aligned} \|T\varphi_k - T\varphi_l\| &= \|(T - T_m)\varphi_k + (T_m\varphi_k - T_m\varphi_l) + (T_m - T)\varphi_l\| \\ &\leq \|(T - T_m)\varphi_k\| + \|T_m\varphi_k - T_m\varphi_l\| + \|(T_m - T)\varphi_l\| \\ &\leq \|T - T_m\| + \|T_m\varphi_k - T_m\varphi_l\| + \|T_m - T\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist $(T\varphi_n)$ eine Cauchyfolge, also (weil \mathcal{H} vollständig ist) konvergent. Somit ist T kompakt.

3. Sei $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $M \in \mathcal{H}$ beschränkt. Dann ist TM relativ kompakt und, weil S stetig ist, ist $S(TM)$ auch relativ kompakt (in Analogie zum bereits bekannten Satz, dass stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind). TS ist kompakt, weil aus der Beschränktheit von M folgt, dass SM beschränkt und damit $T(SM)$ relativ kompakt ist.
4. Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und folglich $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann ist TT^* kompakt. Sei (ψ_n) eine beliebige beschränkte Folge, etwa $\|\psi_n\| \leq C$. Dann existiert eine konvergente Teilfolge (ψ_{n_k}) . Diese Teilfolge ist insbesondere eine Cauchyfolge. Nun zeigen wir, dass $(T^*\psi_{n_k})$ auch eine Cauchyfolge ist. Benutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|T^*\psi_{n_k} - T^*\psi_{n_l}\|^2 &= \langle T^*\psi_{n_k} - T^*\psi_{n_l}, T^*\psi_{n_k} - T^*\psi_{n_l} \rangle \\ &= \langle \psi_{n_k} - \psi_{n_l}, T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l}) \rangle \\ &\leq \|\psi_{n_k} - \psi_{n_l}\| \cdot \|T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l})\| \\ &\leq (\|\psi_{n_k}\| + \|\psi_{n_l}\|) \cdot \|T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l})\| \\ &\leq 2C \cdot \|T^*T(\psi_{n_k} - \psi_{n_l})\| \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

5. Sei $F \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$ und $M \subset \mathcal{H}$ beschränkt. Damit ist FM eine beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen Raumes, nämlich des Wertebereiches von F , also relativ kompakt. Die Dichtheit wird aus Zeitgründen nicht bewiesen.

■

Beispiele kompakter Operatoren

1. endlichdimensionale Operatoren $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ (siehe Satz 22.4)
2. Ein Diagonaloperator $A = \text{diag}(a_n)$ (etwa im l^2) ist genau dann kompakt, wenn $a_n \rightarrow 0$ geht.
3. **Integraloperatoren:** Auf $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ ist der Operator K gegeben durch

$$(Kf)(x) := \int_a^b k(x, y) \cdot f(y) \, dy$$

mit einer Funktion k , für die $\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 \, dx dy < \infty$ gilt. Diese Funktion wird **Kern** genannt.

23.2 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren

Satz 23.5

Sei $T = T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann gilt:

1. $0 \in \sigma(T)$
2. Für $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq 0$ ist λ ein Eigenwert endlicher Vielfachheit.
3. Ist T nicht endlichdimensional, dann bilden die Eigenwerte eine Nullfolge.

Beweis

1. Wäre $0 \notin \sigma(T)$, dann wäre $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Also wäre $I = T \cdot T^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Das ist ein Widerspruch, denn der Einheitsoperator im unendlichdimensionalen Hilbertraum ist nicht kompakt, weil die (beschränkte) Einheitskugel auf die (nicht relativ kompakte) Einheitskugel abgebildet wird.
2. Sei $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$. Nach dem Weyl-Kriterium existiert eine Folge (φ_n) mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow 0$. Weil T kompakt ist, enthält $(T\varphi_n)$ eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen o.E.d.A. an, dass $(T\varphi_n)$ selbst konvergiert. Folglich konvergiert auch $((T - \lambda \cdot I)\varphi_n)$. In der Darstellung

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda} \cdot [T\varphi_n - (T - \lambda \cdot I)\varphi_n]$$

sieht man, dass auch (φ_n) konvergiert. Wegen $(T - \lambda \cdot I)\varphi_n \rightarrow 0$ ist:

$$\lim \varphi_n = \varphi = \lim \left(\frac{1}{\lambda} \cdot T\varphi_n \right) \quad \text{und} \quad \lim \|\varphi_n\| = \|\varphi\| = \lim \left\| \frac{1}{\lambda} \cdot T\varphi_n \right\|$$

Da T stetig ist, folgt $T\varphi_n \rightarrow T\varphi = \lambda\varphi$, das heißt $\lambda \in \sigma_p(T)$. Zu zeigen ist noch, dass λ eine endliche Vielfachheit hat. Angenommen, λ hätte eine unendliche Vielfachheit, d.h. $\text{Kern}(T - \lambda \cdot I)$ ist unendlichdimensional. Auf $\text{Kern}(T - \lambda \cdot I)$ eingeschränkt ist $T = \lambda \cdot I$. T ist kompakt, aber $\lambda \cdot I$ ist (im Unendlichdimensionalen) nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch.

3. T habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Dann gilt:

$$T = \lambda_1 \cdot P_1 + \dots + \lambda_m \cdot P_m$$

Hierbei ist P_i die Projektion auf den Eigenraum zu λ_i . Zum Beweis: Sei $\mathcal{H}_1 = \text{lin} \{P_1\mathcal{H}, \dots, P_m\mathcal{H}\} = P_1\mathcal{H} \oplus \dots \oplus P_m\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$, also $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Wegen $T = T^*$ gilt nicht nur $T\mathcal{H}_1 \in \mathcal{H}_1$, sondern auch $T\mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}_2$. (Denn: Sei $\varphi \in \mathcal{H}_1$ und $\psi \in \mathcal{H}_2$, dann ist $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle = 0$ wegen $T\varphi \in \mathcal{H}_1$.) Dann ist $S := T|_{\mathcal{H}_2}$ auch ein selbstadjungierter kompakter Operator. S kann als Eigenwert nur 0 haben, also ist $\|S\| = 0$ (nach Satz 22.20). Somit ist $S = T|_{\mathcal{H}_2} = 0$. Damit ist die Darstellung $T = \lambda_1 \cdot P_1 + \dots + \lambda_m \cdot P_m$ bewiesen, denn auf \mathcal{H}_1 gilt diese Darstellung natürlich, und auf \mathcal{H}_2 verschwinden beide Seiten.

Sei nun $\dim \text{im } T = \infty$. Zu zeigen ist, dass 0 der einzige Häufungspunkt des Spektrums ist. Angenommen, $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq 0$ wäre ein Häufungspunkt von $\sigma(T)$. Das heißt, es existiert eine Folge $(\lambda_n) \subset \sigma(T)$ mit $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Es existiert also wiederum ein Orthonormalsystem (φ_n) mit $T\varphi_n = \lambda_n \cdot \varphi_n$. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge (φ_{n_k}) , für die $(T\varphi_{n_k})$ konvergiert. Nun gilt aber auch $\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda \neq 0$, somit ist auch $T\varphi_{n_k}/\lambda_{n_k}$ konvergent.

$$\frac{T\varphi_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = \frac{\lambda_{n_k} \cdot \varphi_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = \varphi_{n_k}$$

Das ist ein Widerspruch, denn (φ_{n_k}) ist natürlich nicht konvergent. Somit hat T nur den Häufungspunkt $0 \in \sigma(T)$ und die Folge der Eigenwerte ist abzählbar (eine überabzählbare Menge

kann nicht nur einen Häufungspunkt haben!). Also konvergiert die Folge der Eigenwerte gegen Null.

Bemerkung

Im Beweis wurde nirgends benutzt, dass \mathcal{H} separabel ist. Aus dem Beweis sieht man: Wenn $T = T^*$ ist, dann hat T abzählbar viele Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit. Somit wird im T auch nur von einem abzählbaren Orthonormalsystem aufgespannt, ist also separabel.

Theorem 23.6 Spektraltheorem für selbstadjungierte kompakte Operatoren

Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, mit den von Null verschiedenen Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ (o.E.d.A. ist $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$). Ferner sei P_i die Orthoprojektion auf den Eigenraum zu λ_i . Dann gilt:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot P_j \quad (23.1)$$

Falls im T unendlichdimensional ist, konvergiert (23.1) bezüglich der Operatornorm.

Beweis

Der Beweis des ersten Teil verläuft analog zum Beweis zu Satz 23.5.3: Sei also $\mathcal{H}_1 := \overline{\text{lin}\{P_i\mathcal{H} : i \in \mathbb{N}\}}$ und $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$. P ist eine Orthoprojektion von \mathcal{H} auf \mathcal{H}_2 . Dann gilt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \quad \text{und} \quad T\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$$

Für die rechte Aussage zeigt man zuerst einfach, dass $T \text{lin}\{P_i\mathcal{H}\} \subset \text{lin}\{P_i\mathcal{H}\}$ gilt. Auch einfach beweisbar ist $T\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$ und $T|_{\mathcal{H}_2} = 0$. Dann gilt:

$$I = P + \sum_i P_i$$

Die P_i sind dabei paarweise orthogonal. Wichtig ist, dass die Summe nicht im Sinne der Operatornorm konvergiert, sondern nur punktweise, d.h. für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\varphi = P\varphi + \sum_i P_i\varphi \quad \Rightarrow \quad T\varphi = \underbrace{TP\varphi}_{\in \mathcal{H}_2} + \underbrace{\sum_i TP_i\varphi}_{\in \mathcal{H}_1} = TP\varphi + \sum_i \lambda_i \cdot P_i\varphi$$

Wegen $T|_{\mathcal{H}_2} = 0$ verschwindet der erste Term. Damit gilt (23.1) punktweise für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$. Es muss noch gezeigt werden, dass die Operatorreihe gleichmäßig konvergiert. Sei nun $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\| \leq 1$ beliebig. Dann gilt, weil die $\lambda_i \cdot P_i\varphi$ paarweise orthogonal sind:

$$\left\| \left(T - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i \right) \varphi \right\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i \cdot P_i\varphi \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \cdot \|P_i\varphi\|^2$$

Man beachte $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$ für alle $i \geq j$:

$$\left\| \left(T - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i \right) \varphi \right\|^2 \leq |\lambda_{m+1}|^2 \cdot \sum_{i=m+1}^{\infty} \|P_i\varphi\|^2 \leq |\lambda_{m+1}|^2 \cdot \|\varphi\|^2 \leq |\lambda_{m+1}|^2$$

Also konvergiert $\|(T - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot P_i) \varphi\|^2 \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Da φ mit $\|\varphi\| \leq 1$ beliebig war, konvergiert somit $\|T - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot P_i\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Folgerung 23.7 Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz

Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann existiert eine reelle Folge (μ_j) (endlich oder Nullfolge) und ein Orthonormalsystem $(\varphi_j) \subset \mathcal{H}$ mit:

$$T\varphi = \sum_i \mu_i \cdot \langle \varphi_i, \varphi \rangle \cdot \varphi_i \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad (23.2)$$

In Bra-Ket-Schreibweise lautet die Formel: $T = \sum_i \mu_i \cdot |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$.

Beweis

Keine neue Idee, nur geschicktes Aufschreiben: Sei $\dim(P_j\mathcal{H}) =: k_j$ und $(\psi_1^j, \dots, \psi_{k_j}^j)$ eine Orthonormalbasis in $P_j\mathcal{H}$. Setze $\mu_1^j = \dots = \mu_{k_j}^j := \lambda_j$. Dann gilt also:

$$T\varphi = \sum_j \lambda_j \cdot P_j\varphi = \sum_j \lambda_j \cdot \sum_{k=1}^{k_j} \langle \psi_k^j, P_j\varphi \rangle \cdot \psi_k^j$$

Beachte $\langle \psi_k^j, P_i\varphi \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Damit verbleibt:

$$T\varphi = \sum_j \lambda_j \cdot \sum_{k=1}^{k_j} \langle \psi_k^j, \varphi \rangle \cdot \psi_k^j = \sum_{j,k} \mu_k^j \cdot \langle \psi_k^j, \varphi \rangle \cdot \psi_k^j$$

Jetzt werden die μ_k^j und gleichzeitig die ψ_k^j durchnummeriert. Es entstehen die Folgen (μ_j) und (φ_j) . Damit enthält die Formel nur noch eine Summe, die dann genau die Struktur von (23.2) annimmt. ■

23.3 Der allgemeine Zustandsbegriff

Um ein physikalisches System zu beschreiben benötigt man mathematische Objekte/Begriffe zu Beschreibung von

- *Zustände*, in denen sich das System befinden kann
- *Observablen*, das heißt die beobachtbaren Größen des Systems
- *Zeitentwicklung* des Systems
- *Symmetrien* des Systems – Hier spielen Symmetriegruppen eine große Rolle.

In der Quantenmechanik hat sich das folgende mathematische Modell bewährt. Observable entsprechen selbstadjungierten (meist unbeschränkten) Operatoren in einem geeigneten (das heißt: dem System möglichst gut angepassten) Hilbertraum. In der Regel ist dies ein $L^2(\mathbb{R}^n)$, wobei das n etwas mit der Teilchenanzahl des Systems zu tun hat. Die Quantenmechanik betrachtet immer Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden. In der Physik hat man: Der Observablen A wird der Operator \hat{A} zugeordnet. (Oft verwendet man auch \bar{A} , aber das ist bei uns schon das Symbol für den Abschluss.) In der Mathematik hat man nur ein Symbol A .

Die einfachsten Zustände sind die sogenannten *Vektorzustände*; diese werden repräsentiert durch einen Einheitsvektor $\varphi \in \mathcal{H}$ ($\|\varphi\| = 1$). Der Zusammenhang zwischen Zuständen und Observablen ist gegeben durch den *Erwartungswert* der Observablen $A = A^*$ im Zustand φ , der gegeben ist durch $\langle \varphi, A\varphi \rangle$.

Seien φ und ψ zwei Zustände. Dann kann man ein „Gemisch“ aus diesen Zuständen betrachten. Dann befindet sich das System mit der Wahrscheinlichkeit p im Zustand φ und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ im Zustand ψ . Dann ist der Erwartungswert von A in diesem gemischten Zustand gegeben durch $p \cdot \langle \varphi, A\varphi \rangle + (1 - p) \cdot \langle \psi, A\psi \rangle$. Das Problem hierbei ist, dass es im Allgemeinen kein $\chi \in \mathcal{H}$ mit $\|\chi\| = 1$ (also keinen Vektorzustand) gibt, für den A diesen Erwartungswert annimmt.

Wie sollen also gemischte Zustände mathematisch beschrieben werden? Dazu benötigt man sogenannte *Dichtematrizen* (besser: *Dichteoperatoren*).

Definition 23.8

Ein positiver selbstadjungierter kompakter Operator T heißt **nuklear** oder **Spurklasse-Operator**, wenn für eine Orthonormalbasis (φ_n) von \mathcal{H} gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, T\varphi_k \rangle < \infty$$

T heißt **Dichteoperator** im Falle $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, T\varphi_k \rangle = 1$.

Bemerkung

1. Den Begriff des Spurklasse-Operators kann man auch allgemeiner definieren, ohne einen positiven selbstadjungierten Operator zu fordern.
2. Im nächsten Satz werden wir sehen, dass der Begriff Dichteoperator korrekt definiert ist, also unabhängig von der Orthonormalbasis.

Satz 23.9

1. Sei $T \geq 0$ ein Spurklasseoperator. Dann gilt: $\sum_k \langle \psi_k, T\psi_k \rangle$ hat für jede Orthonormalbasis (ψ_n) den gleichen Wert. Nimmt man als Orthonormalbasis die Basis (φ_n) der Eigenvektoren von T ($T\varphi_n = \lambda_n \cdot \varphi_n$), dann gilt also:

$$\sum_k \lambda_k < \infty$$

Man nennt diesen Ausdruck die **Spur** von T und schreibt $\text{Tr } T := \sum_k \lambda_k$.

2. Sei $T \geq 0$ ein Spurklasseoperator und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann ist AT und TA auch ein Spurklasseoperator, aber im Allgemeinen nicht größer Null. Außerdem hat

$$\text{Tr } AT = \sum_k \langle \psi_k, AT\psi_k \rangle = \text{Tr } TA$$

für jede Orthonormalbasis (ψ_k) den gleichen Wert. Insbesondere gilt:

$$\text{Tr } AT = \sum_k \lambda_k \langle \varphi_k, A\varphi_k \rangle$$

Bemerkung

1. Die Dichteoperatoren sind also Operatoren T mit den Eigenwerten $\lambda_k \geq 0$ und $\text{Tr } T = \sum_k \lambda_k = 1$. Damit hat T die folgende Darstellung (in normaler und in Bra-Ket-Schreibweise):

$$T = \sum_k \lambda_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \varphi_k = \sum_k \lambda_k \cdot |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$$

2. Vektorzustände, das heißt: Zustände, die durch ein $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\| = 1$ beschrieben werden können, ordnen sich hier folgendermaßen ein: Betrachte die Orthoprojektion $T := P_\varphi = \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi = |\varphi\rangle \langle \varphi|$. Dabei erhält man $\text{Tr } T = 1$ und der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand φ ist

$$\langle \varphi, A\varphi \rangle = \text{Tr } TA = \text{Tr } AT$$

Ein gemischter Zustand mit dem Erwartungswert $p \cdot \langle \varphi, A\varphi \rangle + q \cdot \langle \psi, A\psi \rangle$ wird durch den folgenden Dichteoperator beschrieben:

$$T = p \cdot \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi + q \cdot \langle \psi, \cdot \rangle \psi = p \cdot |\varphi\rangle \langle \varphi| + q \cdot |\psi\rangle \langle \psi|$$

Zusammenfassung: In der Quantenphysik werden Zustände durch Dichtematrizen, sprich: Dichteoperatoren (T mit $T \geq 0$ und $\text{Tr } T = 1$) beschrieben. Dabei ist $\text{Tr } AT$ der Erwartungswert von A im Zustand, der durch T beschrieben wird. Für Vektorzustände (reine Zustände) ist $T = \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi$ und für gemischte Zustände hat das T eine ähnliche Struktur wie im obigen Beispiel:

$$T = \sum_k \lambda_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \cdot \varphi_k$$

Man sieht, dass gemischte Zustände Überlagerungen von Vektorzuständen sind.

3. Ist T ein Dichteoperator und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann sind TA und AT nuklear und $\text{Tr } AT = \text{Tr } TA$ ist wohldefiniert. Wenn aber – wie in der Quantenmechanik fast immer – A ein unbeschränkter Operator ist, dann können nicht beliebige Dichteoperatoren T mögliche Zustände repräsentieren. Man kann dann höchstens solche T nehmen, bei denen AT und TA wieder nuklear sind.
4. In der Quantenstatistik ist der wichtigste Zustand der sogenannte **Gibbs-Zustand**. Sei $H = H^*$ der Hamiltonoperator des betrachteten Systems. Dann wird der Gibbs-Zustand wie folgt beschrieben:

$$T = \frac{e^{-\beta \cdot H}}{\text{Tr } e^{-\beta \cdot H}}$$

In β gehen die inverse Temperatur und die Boltzmann-Konstante ein. Das Problem: Was ist $\exp(-\beta \cdot H)$ für das unbeschränkte H ?

24 Bemerkungen zum Spektraltheorem

Das Spektraltheorem ist das zentrale Theorem über selbstadjungierte und normale Operatoren im Hilbertraum. Der Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind zwei Fragenstellungen:

1. Wie kann man die Diagonalisierung selbstadjungierter Operatoren im endlichdimensionalen Raum beziehungsweise kompakter Operatoren im Hilbertraum auf beliebige selbstadjungierte/kompakte Operatoren verallgemeinern?
2. Wie kann man für möglichst viele Funktionen f einen Kalkül entwickeln, der $f(T)$ für selbstadjungierte $T = T^*$ liefert?

Beispiel 24.1 Idee zu endlichdimensionalen Fällen

Sei $T = T^*$ und $T = \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot P_j$. λ_j sind die paarweise verschiedenen Eigenwerte mit den paarweise orthogonalen Projektionen P_j . Was ist $f(T)$? Für welche f lässt sich dieser Ausdruck bestimmen? Die einzige vernünftige Definition ist:

$$f(T) = \sum f(\lambda_j) \cdot P_j$$

Das geht für alle Funktionen f , die auf $\sigma(T)$ definiert sind. f kann also etwa ein beliebiges Polynom sein, zum Beispiel $p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n$. Dann ist $p(T) = a_0 + a_1 \cdot T + \dots + a_n \cdot T^n$ für jeden Operator T wohldefiniert. Das heißt, für selbstadjungierte Operatoren T kann man $p(T)$ bilden, ohne die Spektralzerlegung zu kennen.

Beim Übergang zum unendlichdimensionalen Fall treten mehrere Probleme auf. Problematisch bei selbstadjungierten Operatoren ist immer das stetige Spektrum (denn das sind keine Eigenwerte im engeren Sinne). Will man die Darstellung $T = \sum_j \lambda_j \cdot P_j$ (für kompakte T) verallgemeinern, so muss man die Summe durch ein Integral ersetzen.

Zur Motivation: Seien (P_j) paarweise verschiedene Orthoprojektionen mit $I = \sum_j P_j$. (Diese Reihe konvergiert nicht im Sinne der Operatornorm, sondern punktweise: $\varphi = \sum_j P_j \varphi$.) Aus solchen P_j werden Operatoren gebaut: Bilde mit der beschränkten Folge (μ_j) die Summe $\sum_j \mu_j \cdot P_j$. Das liefert auf alle Fälle einen beschränkten Operator A im Sinne von:

$$A\varphi = \sum_j \mu_j \cdot P_j \varphi \quad (*)$$

Die μ_j sind dann Eigenwerte von A .

Definition 24.1

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Eine Familie $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ von Orthoprojektoren heißt **Spektralschar** (manchmal auch: **Zerlegung der Eins**), wenn gilt:

1. $E(\cdot)$ ist monoton wachsend: $E(\lambda) \leq E(\mu)$ für $\lambda \leq \mu$ im Sinne von $E(\lambda)\mathcal{H} \subset E(\mu)\mathcal{H}$.
2. Es existieren $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq M$, sodass $E(\lambda) = 0$ für $\lambda \leq m$ und $E(\lambda) = I$ für $\lambda \geq M$ ist. Man sagt, die Spektralschar ist auf $[m, M]$ konzentriert.
3. Die Zuordnung $\lambda \mapsto E(\lambda)$ ist rechtsseitig stetig, das heißt: $E(\lambda) = E(\lambda + 0) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} E(\mu)$. Auch diese Konvergenz ist nur punktweise, d.h. es ist $E(\lambda)\varphi = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} E(\mu)\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.

Bemerkung

1. Will man diese Theorie auch für unbeschränkte Operatoren entwickeln, so ersetzt man die zweite Bedingung durch:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)\varphi = \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

2. In der dritten Bedingung ist die Rechtsstetigkeit lediglich eine Vereinbarung. Man kann stattdessen auch linksseitige Stetigkeit fordern; dann ändert sich aber in Formeln mit der Spektralschar häufig etwas.
3. Beim Riemann-Stieltjes-Integral haben wir $\int f dg$ für monoton wachsende Funktionen g betrachtet. Bei der Bildung der Riemann-Stieltjes-Zwischensumme haben wir Intervallen nicht die normale Länge, sondern eine „Masse“ zugeordnet. Das geht hier analog: Einem Intervall wird ein Projektor zugeordnet. Genauer geht das mit der rechtsseitigen Stetigkeit so:

$$\begin{aligned} \Delta = (\lambda, \mu] &\mapsto E(\Delta) := E(\mu) - E(\lambda) \\ \Delta = (\lambda, \mu) &\mapsto E(\Delta) := E(\mu - 0) - E(\lambda) \\ \Delta = [\lambda, \mu) &\mapsto E(\Delta) := E(\mu - 0) - E(\lambda - 0) \\ \Delta = [\lambda, \mu] &\mapsto E(\Delta) := E(\mu) - E(\lambda - 0) \end{aligned}$$

(Damit diese Definitionen sinnvoll sind, muss man teilweise noch zeigen, dass Ausdrücke der Form $E(\mu - 0)$ wieder Orthoprojektionen sind.) Insbesondere hat man also $E(\{\mu\}) = E(\mu) - E(\mu - 0) = E(\mu + 0) - E(\mu - 0)$. Sprungstellen in der Spektralschar sind typisch für Eigenwerte.

Beispiel 24.2

Endlichdimensionaler Fall

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

sei ein Operator in Matrixdarstellung. Die Projektoren auf die zugehörigen Eigenräume sind gegeben durch:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun ist offensichtlich $T = \lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 + \lambda_3 \cdot P_3$. Aus den P_j konstruiert man nun wie folgt das zu T gehörende Spektrum: (Es wird später klar, warum dieses Spektrum zu T gehört.)

$$E(\lambda) := \sum_{\substack{j=1..3 \\ \lambda_j \leq \lambda}} P_j$$

Man erhält eine Art Treppenfunktion, zum Beispiel für $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$:

$$E(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < \lambda_1 \\ P_1 & \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2 \\ P_1 + P_2 & \lambda_2 \leq \lambda < \lambda_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 = I & \lambda \geq \lambda_3 \end{cases}$$

Das weitere Vorgehen orientiert sich an folgenden Kernfragen:

1. Wie integriert man bezüglich $E(\lambda)$, d.h. was sind $\int \lambda dE(\lambda)$ und $\int f(\lambda) dE(\lambda)$?
2. Wie findet man zu einem $T = T^*$ eine Spektralschar $E(\lambda)$, für die gerade $\int \lambda dE(\lambda) = T$ ist?

Wir betrachten nun einen beliebigen kompakten Operator $T = T^*$ mit (λ_k) als Folge der Eigenwerte. Mit P_k ist wieder die Projektion auf den Eigenraum zu λ_k bezeichnet. Das Spektrum hat dann folgende Gestalt:

$$E(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k, \lambda_k \leq \lambda} P_k & \lambda < 0 \\ I - \sum_{k, \lambda_k > \lambda} P_k & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Diese Schreibweise umgeht bis auf $\lambda = 0$ unendliche Summen.

Theorem 24.2 Integration bezüglich einer Spektralschar

Jede Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$, konzentriert auf $[m, M]$, entspricht genau einem selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$T = \int_{m-0}^M \lambda \, dE(\lambda) \quad (24.1)$$

Außerdem gilt für jede auf $[m, M]$ gegebene Funktion f :

$$f(T) = \int_{m-0}^M f(\lambda) \, dE(\lambda) \quad (24.2)$$

Die Integrale (24.1) und (24.2) sind als Grenzwerte der entsprechenden Zwischensummen im Sinne der Operatornorm zu verstehen.

Beweis

Die Beweisidee ist, die üblichen (Riemann-Stieltjes-)Zwischensummen zu verwenden: Sei $m_1 < m$.

$$\mathcal{Z} = \{m_1 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = M\}$$

ist eine Zerlegung von $[m_1, M]$ mit der Feinheit $d(\mathcal{Z})$, das ist: das Minimum der Längen der Intervalle $\Delta_k := (\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ (mit $k = 0, 1, \dots, n-1$), welche beliebige wählbare Zwischenpunkte $\lambda'_k \in \Delta_k$ enthalten. Nun ist die Zwischensumme:

$$S_{\mathcal{Z}} := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda'_k \cdot [E(\lambda_{k+1}) - E(\lambda_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda'_k \cdot E(\Delta_k)$$

Die Zwischensumme ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Jetzt kann man zeigen, dass diese Zwischensumme für jede Zerlegungsnullfolge (\mathcal{Z}_n) (d.h. $d(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$) bezüglich der Operatornorm eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bildet. Da $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezüglich der Operatornorm vollständig ist, existiert ein Operator $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\mathcal{Z}_n} =: T$. Das schreibt man natürlich in der Kurzform (24.1). Man muss $m_1 < m$ wählen, weil für das Intervall $(\lambda_0, \lambda_1]$ im Falle $m_1 = m$ der Punkt m , das heißt der Orthoprojektor $E(\{m\})$ nicht berücksichtigt würde. (24.2) erhält man analog durch die Betrachtung der Zwischensummen:

$$S_{\mathcal{Z}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\lambda'_k) \cdot E(\Delta_k)$$

■

Bemerkung

1. Die in der Definition der Spektralschar auftretenden m und M können „optimal“ definiert werden:

$$m = \sup \{ \tilde{m} : E(\tilde{m}) = 0 \} \quad \text{und} \quad M = \inf \{ \tilde{M} : E(\tilde{M}) = I \}$$

2. In der Formulierung des Theorems gibt es eine Feinheit. Die Formel (24.2) kann in zweifacher Weise gelesen werden.

Zum einen kann man T durch (24.1) als Grenzwert der Zwischensummen erhalten. Da die Zwischensummen zu (24.2) wieder konvergieren, bezeichnet man den Limes sinnvollerweise mit $f(T)$.

Zum anderen kann man T aufgrund von (24.1) als bekannt voraussetzen. Dann ist für jedes Polynom p klar, was $p(T)$ ist. Wenn p nur reelle Koeffizienten hat, dann ist $p(T)$ selbstadjungiert. Nun kommt der **weierstraßsche Approximationssatz** ins Spiel: Jede auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion f ist der Grenzwert einer Folge von Polynomen (bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz).

Es kann bewiesen werden, dass, wenn (p_n) auf $[-\|T\|, \|T\|] \supset \sigma(T)$ gleichmäßig gegen f konvergiert, die Folge $(p_n(T))$ bzgl. der Operatornorm eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist. Das heißt, es existiert ein $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $p_n(T) \rightarrow S =: f(T)$.

$$\begin{array}{ccc} p_n & \xrightarrow{\text{glm.}} & f \\ \downarrow & & (\downarrow) \\ p_n(T) & \xrightarrow{\|\cdot\|} & f(T) \end{array}$$

Dieser gesamte Kalkül ist insofern in sich stimmig, dass dieses obige $S = f(T)$ mit dem $f(T)$ aus (24.2) übereinstimmt.

3. Die Integrale in (24.1) und (24.2) haben auch eine Interpretation, die nahe am gewöhnlichen RS-Integral liegt. Die Monotonie der Spektralschar $E(\lambda)$ bedeutet:

$$E(\lambda) \leq E(\mu) \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi, E(\lambda)\varphi \rangle \leq \langle \varphi, E(\mu)\varphi \rangle$$

Allgemeiner gilt für zwei selbstadjungierte Operatoren A und B :

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad B - A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \varphi, A\varphi \rangle \leq \langle \varphi, B\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Es gilt also $\|E(\lambda)\varphi\| \leq \|E(\mu)\varphi\|$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ und $\lambda \leq \mu$. Daraus folgt wiederum, dass die Funktion $\lambda \mapsto \|E(\lambda)\varphi\|^2$ eine reellwertige, monoton wachsende Funktion ist. Damit ist aber das folgende Integral als Riemann-Stieltjes-Integrale wohldefiniert:

$$\int_{m-0}^M \lambda \, d\|E(\lambda)\varphi\|^2 = \int_{m-0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Das analoge Integral für (24.2) ist auch wohldefiniert. Mittels der Polarisationsidentität (21.5) folgt, dass auch das Integral

$$\int_{m-0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

wohldefiniert ist. Jetzt zeigt man, dass die Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\varphi, \psi) \rightarrow \int_{m-0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\psi \rangle$ eine stetige Sesquilinearform ist (d.h. die Abbildung ist in der ersten Komponente konjugiert linear und in der zweiten Komponente linear). Damit existiert nach dem Satz von Riesz (in einer bisher nicht behandelten Variante) ein selbstadjungierter Operator T mit $\langle \varphi, T\psi \rangle = \int_{m-0}^M \lambda \, d\langle \varphi, E(\lambda)\psi \rangle$. Das ist genau der Operator, den wir im Theorem dieser Spektralschar zugeordnet haben.

Jetzt haben wir zu jeder Spektralschar einen selbstadjungierten Operator. Man kann auch andersherum einem selbstadjungierten Operator eine Spektralschar zuordnen. Zur Formulierung des entsprechenden Theorems benötigen wir einen starken Konvergenzbegriff.

Definition 24.3 Starke Operatorkonvergenz

Man sagt, eine Folge $(T_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ **konvergiert stark** gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wenn $T_n\varphi \rightarrow T\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ (bezüglich der Norm in \mathcal{H}) ist.

Theorem 24.4 Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren

1. Zu jedem selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existiert genau eine Spektralschar $(E(\lambda))$, konzentriert auf $[-\|T\|, \|T\|]$, sodass im Sinne von Theorem 24.3 und den folgenden Bemerkungen die Gleichungen (24.1) und (24.2) gelten.
2. Die $E(\lambda)$ sind Grenzwerte von Folgen von Polynomen im Sinne der starken Operatorkonvergenz.
3. Der Operator kommutiert mit der Spektralschar, und wenn ein Operator B mit T kommutiert, dann auch mit der Spektralschar:^a

$$[E(\lambda), T] = 0 \quad \text{und} \quad [B, T] = 0 \quad \Rightarrow \quad [E(\lambda), B] = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

^aMan sagt, $E(\lambda)$ ist ein Bikommutant von T , und schreibt $E(\lambda) \in \{T\}''$.

Beweis

1. Erneut soll nur die Beweisidee aufgezeigt werden: Alle im Folgenden auftretenden Funktionen seien mindestens auf einem Intervall definiert, dass $\sigma(T)$ enthält, etwa auf $[-\|T\|, \|T\|]$. Oben war schon beschrieben, dass $p(T)$, $f(T)$ und f stetig sind. Wenn g nur stückweise stetig ist und $g(T)$ definiert werden soll, dann muss man die gleichmäßige Konvergenz (d.h. auch die Konvergenz bezüglich der Operatornorm) verlassen.

Es gilt: Sei $g \geq 0$ stückweise stetig, sodass eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen (f_n) existiert, die punktweise gegen g konvergiert. Dann ist $(f_n(T))$ eine monoton fallende Folge selbstadjungierter Operatoren, und es existiert ein selbstadjungierter Operator $g(T)$, gegen den $f_n(T)$ im Sinne der starken Operatorkonvergenz konvergiert. Ein Spezialfall für solche g ist:

$$e_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \lambda \\ 0 & t > \lambda \end{cases} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Leicht findet man eine Folge (f_n) stetiger, monoton fallender Funktionen, die punktweise gegen e_λ konvergiert (indem man die Stufe bei $t = \lambda$ abschrägt und für wachsende n immer steiler werden lässt). Wenn man e_λ nun so bildet, so erhält man ein $E(\lambda)$ mit allen Eigenschaften einer Spektralschar.

2. Da jedes f_n ein Grenzwert einer Polynomfolge ist (im Sinne glm. Konvergenz) und e_λ der Grenzwert der f_n (im Sinne punktwaiser Konvergenz) ist, ist $e_\lambda(T) = E(\lambda)$ der Grenzwert (im Sinne starker Operatorkonvergenz) von Polynomen in T . ■

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Spektralschar und Spektrum? Wie kann die Spektralschar in der Quantenmechanik angewendet werden? Was passiert bei unbeschränkten Operatoren?

Satz 24.5

Sei $T = T^* = \int_{m-0}^M \lambda \, dE(\lambda)$. Dann gilt:

1. μ liegt genau dann in $\sigma(T)$, wenn μ in keinem Konstanzintervall der Spektralschar liegt.

$$\forall \varepsilon > 0 : E(\mu + \varepsilon) - E(\mu - \varepsilon) \neq 0$$

2. μ ist genau dann ein Eigenwert, wenn $E(\mu+0) - E(\mu-0) \neq 0$ ist. Der Projektor $E(\{\mu\})$ projiziert dann genau auf den Eigenraum zu μ . Die Eigenwerte entsprechen also den Sprungstellen der Spektralschar.

Bemerkung

1. Die Charakterisierung von $\mu \in \sigma(T)$ bedeutet also: Wenn $\lambda \in \varrho(T)$, dann existiert um λ ein Intervall $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset \sigma(T)$, in welchem die Spektralschar konstant ist. (Man beachte, dass die Resolventenmenge offen ist!)
2. Für $\mu \in \sigma_p(T)$ ist $E(\{\mu\}) \neq 0$.

Zum Spektraltheorem sind noch einige Ergänzungen möglich:

1. Die Spektralzerlegung lässt sich allgemein für *normale* Operatoren beweisen: Wenn T normal ist, dann ist $TT^* = T^*T$. Also ist die folgende Darstellung möglich:

$$T = T_1 + i \cdot T_2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} T_1 := (T + T^*)/2 \\ T_2 := (T - T^*)/2i \end{cases}$$

Hierbei sind T_1 und T_2 selbstadjungiert und kommutieren miteinander. Nun konstruiert man aus $E_1(\cdot)$ und $E_2(\cdot)$ eine sogenannte Spektralschare in der Ebene. Man erhält:

$$T = T_1 + iT_2 = \int_{-a}^a x \, dE_1(x) \cdot \int_{-a}^a dE_2(y) + i \int_{-a}^a dE_1(x) \cdot \int_{-a}^a y \, dE_2(y) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a z \, dE_1(x) \, dE_2(y)$$

Diesen Ausdruck bekommt man als Zwischensummen folgender Art:

$$\sum_{k,l} z_{kl} \cdot E(\Delta_{kl}) = \sum_{kl} z_{kl} \cdot E_1(I_k) \cdot E_2(J_l)$$

Hierbei ist $z_{kl} = x_{kl} + iy_{kl} \in \Delta_{kl}$ ein Zwischenpunkt und $\Delta_{kl} = I_k \times J_l$ ein Rechteck aus einer Zerlegung von $[-a, a] \times [-a, a]$. a soll so gewählt sein, dass zum Beispiel $-a < -\|T\|$, also $a > \|T\|$. Mit anderen Worten: $\sigma(T) \subset (-a, a) \times (-a, a)$. Das oben genannte Spektralmaß $E(\cdot)$ wird also so definiert, dass für ein Rechteck $\Delta = I \times J$ mit $\alpha < x \leq \beta$ ($\hat{=} I$) und $\gamma < y \leq \delta$ ($\hat{=} J$) gesetzt wird:

$$E(\Delta = E_1(I) \cdot E_2(J) = (E_1(\beta) - E_1(\alpha)) \cdot (E_2(\delta) - E_2(\gamma))$$

Hierbei ist schon berücksichtigt, dass E_1 und E_2 rechtsseitig stetig sind, also bei links halboffenen Intervallen die obige Definition von $E_1(I)$ und $E_2(J)$ gerade korrekt ist.

2. Man kann auch für *unbeschränkte* selbstadjungierte (und in Analogie zu oben auch normale Operatoren) eine Spektralzerlegung erhalten: Auf $\mathcal{D}(T)$ ist $T = T^*$ definiert und unbeschränkt. Dann existiert eine Spektralschar $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto E(\lambda)$ mit

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) \quad \text{im Sinne von} \quad \langle \varphi, T\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\|E(\lambda)\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T)$$

3. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aspekt in der Quantenmechanik

Sei $\Delta \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (oder eine andere geeignete Teilmenge) und $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\| = 1$. Dann ist $\|E(\Delta)\varphi\|^2$ die Wahrscheinlichkeit, bei Messung der Observablen T im Zustand φ einen Messwert aus Δ zu erhalten. Im Falle $\Delta \cap \sigma(T) = \emptyset$ verschwindet die Wahrscheinlichkeit.

4. Nicht behandelt werden hier insbesondere die Zeitentwicklung quantenmechanischer Systeme (zum Beispiel $e^{i\mathcal{H}t}$ für den Hamiltonoperator $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$) und der Zusammenhang zwischen Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild in der Quantenmechanik.

25 Der Begriff der Holomorphie

25.1 Wiederholung: Komplexe Zahlen. Komplexe Funktionen

Es sei \mathbb{C} der Körper der komplexen Zahlen. Wir ordnen \mathbb{C} immer die Gaußsche Zahlenebene \mathbb{R}^2 zu.

$$z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$$

Die **Funktionaltheorie** ist die Theorie der Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Die exponentielle Darstellung der komplexen Zahlen sah wie folgt aus:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arg z \end{array} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Damit können wir die Potenzen von z einführen:

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Die Gleichung $w^n = z$ hat n verschiedene Lösungen:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ mit $z_n = x_n + iy_n$ konvergiert genau dann gegen $z = x + iy$, wenn $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ konvergiert. Unendliche Reihen und Potenzreihen ergeben sich wie bereits bekannt.

Ein **Gebiet** G ist eine Teilmenge der komplexen Ebene, die offen und zusammenhängend ist. Offen bedeutet, dass für alle $z \in G$ ein Kreis K um z existiert, mit $K \subset G$. Zusammenhängend heißt, dass für beliebige $z_1, z_2 \in G$ stets eine stetige Kurve $C \in G$ existiert, die die Punkte z_1 und z_2 verbindet.

Komplexe Funktionen f bilden von $G = D(f) \subset \mathbb{C}$ nach \mathbb{C} ab. Jedes solche f kann stets wieder als $f = u + iv$ geschrieben werden:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

u und v sind reelle Funktionen zweier reeller Variablen.

Beispiel 25.1 Exponentialfunktion

Die Funktion $f(z) = e^z$ kann wegen $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot \cos y + ie^x \cdot \sin y$ beschrieben werden durch $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$.

25.2 Differenzierbarkeit und Holomorphie

Sei im Folgenden stets G ein Gebiet in \mathbb{C} .

Definition 25.1

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt $a \in G$ komplex (oder: im komplexen Sinne) **differenzierbar** mit der Ableitung $f'(a)$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a)$$

Das ist wieder äquivalent zu $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.

Es gelten die üblichen Rechenregeln und Eigenschaften:

1. Summe, Produkt und Quotienten differenzierbarer Funktionen sind wieder differenzierbar und es gelten die üblichen Regeln.
2. Die Kettenregel für $g : G \rightarrow G_1 \subset \mathbb{C}$, $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ und $f \circ g : G \rightarrow \mathbb{C}$ besagt, dass, wenn g in a und f in $g(a)$ differenzierbar ist, dann ist auch $f \circ g$ in a differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Eine Variante ist, dass durch $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Intervall (a, b) auf eine Kurve C abgebildet wird. (z ist also eine Parameterdarstellung der Kurve.) Die Kurve liege im Definitionsbereich von $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Ist z nach t in (a, b) und f in G differenzierbar, so gilt:

$$\frac{d}{dt} f(z(t)) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$$

3. Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.
4. Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzkreises beliebig oft komplex (d.h. gliedweise) differenzierbar.

Beispiel 25.2

1. $f(z) = \bar{z}$
2. $f(z) = \operatorname{Re} z$
3. $f(z) = \operatorname{Im} z$

Alle diese Funktionen sind *nicht* komplex differenzierbar. Nummer 2 betrachten wir genauer:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \left(\begin{array}{l} h = h_1 + ih_2 \\ z = x + iy \end{array} \right) = \frac{(x+h_1) - x}{h_1 + ih_2} = \frac{h_1}{h_1 + ih_2}$$

Der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ existiert nicht. Zum Beispiel ergibt sich bei Annäherung auf der imaginären Achse ($h_1 = 0$ und $h_2 \rightarrow 0$) der Grenzwert 0, während auf der reellen Achse der Grenzwert 1 entsteht.

Definition 25.2

Die Funktion $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $a \in G$ **holomorph**, wenn es eine Umgebung $U(a) \subset G$ gibt, in der f komplex differenzierbar ist. f heißt im Gebiet G holomorph, wenn f in jedem Punkt $a \in G$ holomorph ist, das heißt f ist in jedem Punkt $b \in G$ differenzierbar.

Der folgende Satz ist das erste fundamentale Resultat in der Funktionentheorie und zeigt einen ersten gravierenden Unterschied zum Reellen.

Satz 25.3

$f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist im Punkt $a = \alpha + i\beta$ genau dann komplex differenzierbar, wenn gilt:

1. u und v sind als Funktionen zweier reeller Variablen im Punkt (α, β) differenzierbar.
2. Im Punkt (α, β) sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** erfüllt:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \quad (CR)$$

Dann gilt: $f'(a) = u_x(\alpha, \beta) + iv_x(\alpha, \beta) = v_y(\alpha, \beta) - iv_y(\alpha, \beta)$.

Beweis

Neben $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir noch $F = (u, v)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit den Punkten $a = \alpha + i\beta$ und $\hat{a} = (\alpha, \beta)^T$. Entsprechend ist $h = h_1 + ih_2$ und $\hat{h} = (h_1, h_2)^T$. Dann ist 25.3.1 äquivalent dazu, dass F in \hat{a} differenzierbar ist, das heißt:

$$F(\hat{a} + \hat{h}) = F(\hat{a}) + A\hat{h} + o(\|\hat{h}\|)$$

Das A ist gerade die Jacobi-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{\hat{a}}$$

Jetzt wird die Definition der Differenzierbarkeit in der Weierstraßschen Variante benutzt. f ist komplex differenzierbar in a mit der Ableitung $f'(a) = b + ic$ genau dann, wenn gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(\|h\|)$$

Unter Benutzung der Darstellung von f durch u und v ist also:

$$u(\hat{a} + \hat{h}) + iv(\hat{a} + \hat{h}) = u(\hat{a}) + iv(\hat{a}) + (b + ic) \cdot (h_1 + ih_2) + o(\|\hat{h}\|)$$

Trennt man Real- und Imaginärteil, so kann man das schreiben als:

$$\begin{pmatrix} u(\hat{a} + \hat{h}) \\ v(\hat{a} + \hat{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\hat{a}) \\ v(\hat{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|\hat{h}\|)$$

Durch Vergleich mit der ersten Gleichung in diesem Beweis sehen wir:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir das Ergebnis einfach ablesen:

$$\begin{aligned} b &= u_x(\alpha, \beta) = v_y(\alpha, \beta) \\ c &= -u_y(\alpha, \beta) = v_x(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Damit ist (CR) gezeigt. ■

Dieser Satz zeigt: Für komplexe Differenzierbarkeit reicht es nicht, dass Realteil und Imaginärteil (beliebig gut) differenzierbar sind: Die (CR) zeigen, dass ein innerer Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil besteht. Wir müssen eine kleine Nuance beachten: Zunächst folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit und der Existenz von u_x, u_y, v_x und v_y nicht die Stetigkeit der Ableitung. Später sehen wir jedoch, dass die Holomorphie von f auch die Differenzierbarkeit von u und v von beliebiger Ordnung impliziert. Damit ist auch f selbst beliebig oft differenzierbar.

Bemerkung

Zusammenhang mit ebenen Strömungen/Vektorfeldern

Sei f in einem Gebiet G holomorph. Dann sind die Vektorfelder $(u, -v)^T$ und $(v, u)^T$ divergenzfrei und erfüllen die Integrabilitätsbedingung. Das entspricht genau der Aussage von (CR) .

Die Umkehrung lautet: Sei $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ ein C^1 -Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen (also divergenzfreien) und wirbelfreien (also rotationsfreien) Strömung. Dann sind die Funktionen $f := v_1 - iv_2$ und $g := v_2 + iv_1$ im Gebiet der obigen Strömung holomorph. Hierbei ist die Rotation wie folgt erklärt: Betrachte \vec{v} als Strömung in \mathbb{R}^3 , also $\vec{v} := (v_1, v_2, 0)^T$.

$$\text{rot } \vec{v} = (0, 0, (v_2)_x - (v_1)_y)$$

$\text{rot } \vec{v} = \text{div } \vec{v} = 0$ entspricht genau den Gleichungen (CR) .

26 Integration holomorpher Funktionen

26.1 Komplexe Kurvenintegrale

Kurvenintegrale im Komplexen werden analog zu Kurvenintegralen in \mathbb{R}^2 behandelt.

Bemerkung

Wiederholung

Ein Weg ist eine stetige, injektive Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Es ist $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ die Parameterdarstellung der zugehörigen Kurve $\mathcal{C} = \gamma([a, b])$. Fast immer setzt man zusätzlich voraus, dass γ (stückweise) stetig differenzierbar ist. Die Begriffe der Integration über γ und über \mathcal{C} benutzen wir synonym.

Gewöhnliche R-Integrale komplexwertiger Funktionen F einer reellen Variablen sehen wie folgt aus:

$$F(t) = G(t) + iH(t) \quad \text{mit} \quad t \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b F(t) dt = \int_a^b G(t) dt + i \cdot \int_a^b H(t) dt$$

Definition 26.1

Sei $f = u + iv$ eine stetige Funktion im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. $\gamma \in C^1([a, b])$ bilde $[a, b] \rightarrow G$ ab, d.h. $\mathcal{C} := \gamma([a, b])$ liegt in G . Unter dem **Integral** von f längs \mathcal{C} bzw. längs γ versteht man:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

Benutzt man $f = u + iv$ und $z(t) = x(t) + iy(t)$, so ergibt sich:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)] dt$$

Lässt man nun die Variablen der Funktionen weg, so erhält man:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + i \cdot \int_a^b (v\dot{x} + u\dot{y}) dt \quad (26.1)$$

Mit $dz = dx + idy$ ist $f(z) dz = (u + iv) \cdot (dx + idy)$ und man kann schreiben:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u dy + v dx) \quad (26.2)$$

Es gelten die üblichen Eigenschaften:

1. Linearität des Integrals bezüglich des Integranden f
2. Verkettung von Kurven: Für $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$ ist $\int_{\mathcal{C}} f dz = \int_{\mathcal{C}_1} f dz + \int_{\mathcal{C}_2} f dz$. Damit ist das Integral auch für stückweise stetig differenzierbare Wege erklärt.
3. Das Integral $\int_{\mathcal{C}} f dz$ ist von der Orientierung von \mathcal{C} bzw. γ abhängig. In unserer Definition ist γ also stets als orientiert zu betrachten:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}^-} f(z) dz$$

4. Standardabschätzung: Wenn $|f(z)| \leq M$ auf \mathcal{C} , dann gilt:

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\mathcal{C}) \quad \text{mit} \quad L(\mathcal{C}) = L(\gamma) = \int_a^b |\dot{z}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Diese Abschätzung hatten wir nur im Reellen. Im Komplexen sind Modifikationen nötig.

Beispiel 26.1 Fundamentalbeispiel

Wir betrachten die Kurve $\mathcal{C} = S_r(a)$, also den Kreis um a mit dem Radius r . Gesucht ist das Integral:

$$\int_{\mathcal{C}} (z - a)^n dz \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Eine Parameterdarstellung $z(t)$ von \mathcal{C} ist:

$$z(t) := a + r \cdot e^{it} \quad \text{mit} \quad 0 < t \leq 2\pi$$

Für $f(z) = (z - a)^n$ ist also $f(z(t)) = r^n \cdot \exp(itn)$. Außerdem ist $\dot{z}(t) = ir \cdot \exp(it)$. Jetzt können wir das Integral aufschreiben. Für $n \neq -1$ ist:

$$\int_{\mathcal{C}} (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dz = \int_0^{2\pi} ir^{n+1} \cdot e^{i(n+1)t} dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Der Fall $n = -1$ muss gesondert betrachtet werden:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ir \cdot e^{it}}{r \cdot e^{it}} dt = 2\pi \cdot i$$

Wie im Reellen kann das Kurvenintegral wegababhängig sein. Es resultieren zwei Probleme (f holomorph):

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Man beschreibe alle geschlossenen Wege \mathcal{C} in G mit $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$.
2. Wie muss $G \subset \mathbb{C}$ beschaffen sein, damit $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ für alle Kurven \mathcal{C} ist?

Wir werden auf beide Fragen Teilantworten geben. Im Vordergrund steht allerdings die zweite Frage.

26.2 Cauchyscher Integralsatz. Cauchysche Integralformel

Beide Aussagen sind die wichtigsten Grundlagen der Funktionentheorie.

Theorem 26.2 Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet. f sei in G holomorph. Dann gilt für jede in G liegende geschlossene Kurve \mathcal{C} :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

Insbesondere ist $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ wegunabhängig.

Beweis Beweiskonzept

Wenn man zusätzlich fordert, dass f' in G stetig ist (das beinhaltet die stetige Differenzierbarkeit u und v in G), dann ist der Beweis einfach. Betrachte dazu (26.2):

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u dy + v dx)$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt für die beiden reellen Integrale die Wegunabhängigkeit, weil G einfach zusammenhängend ist. Ohne diese Forderung der stetigen Differenzierbarkeit erfolgt der Beweis i.A. in mehreren Schritten. Die größte Schwierigkeit ist der erste Schritt, da der Beweis hierzu aufwändig ist.

1. **Satz von Goursat:** Für beliebige Dreiecke $\Delta \subset G$ ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.
2. Nun verallgemeinert man auf $\int_{\mathcal{P}} f(z) dz = 0$, wobei \mathcal{P} ein ganz in G verlaufender, geschlossener Polygonzug ist. Zum Beweis zerlegt man das Polygon so in Dreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, dass $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^n \Delta_i$ ist. (Hierbei muss man unbedingt die Orientierung beachten, damit sich Teilgeraden innerhalb des Polygons wegheben.)
3. Zuletzt wird eine beliebige Kurve \mathcal{C} durch Polygonzüge approximiert: Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ approximiere \mathcal{C} durch ein $\mathcal{P}(\varepsilon)$, dass:

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz - \int_{\mathcal{P}} f(z) dz \right| < \varepsilon$$

■

Im folgenden führen wir Varianten und Verallgemeinerungen dieses Satzes ein.

Theorem 26.2a

Sei G ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{C} \subset G$ eine geschlossene Kurve. f sei auf \mathcal{C} stetig und im Inneren von \mathcal{C} holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

Bemerkung

Spezialfall

Der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes besteht aus unendlich vielen stetig differenzierbaren Kurvenstücken ohne gemeinsame innere Punkte. f sei in G holomorph mit auf dem Rand ∂G stetig. Dann gilt $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$.

Beweis

Die Idee ist wieder, die Kurve \mathcal{C} durch Polygonzüge zu approximieren, die innerhalb von \mathcal{C} verlaufen und ggf. Eckpunkte auf \mathcal{C} haben. Dabei gibt es eine Feinheit: In den Eckpunkten liegt nur Stetigkeit vor. Dazu kann man eine Variante des Satzes von Goursat benutzen, die zulässt, dass f in einem Dreieckseckpunkt nur stetig ist. ■

Theorem 26.2b Cauchyscher Integralsatz für mehrfach zusammenhängende Gebiete

Sei G ein beschränktes Gebiet, das von endlich vielen punktfremden, geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n$ berandet wird. Die Kurven seien so orientiert, dass G zur Linken liegt. Die Funktion f sei in G holomorph und auf den \mathcal{C}_i stetig. Dann gilt:

$$\int_{\partial G} f(z) \, dz = \sum_{i=0}^n \int_{\mathcal{C}_i} f(z) \, dz = 0$$

Bemerkung

Man beachte, dass nun für G kein einfacher, sondern nur ein wegweiser Zusammenhang gefordert wird. Anschaulich kann die Menge also auch „Löcher“ enthalten, die durch zusätzliche Randkurven mit entsprechender Orientierung definiert sind.

Beweis Beweisidee für einen Spezialfall

In der Menge liege nur ein „Loch“ vor, es handle sich anschaulich also um einen „Ring“. Wir stellen uns einen Schnitt von der äußeren Kurve \mathcal{C}_0 bis zur inneren Kurve \mathcal{C}_1 vor. Zur Berandung des Gebietes gehen wir zuerst \mathcal{C}_0 ab, dann den Schnitt \mathcal{C}_s zu \mathcal{C}_1 , dann \mathcal{C}_1 selbst, und dann entlang des Schnittes \mathcal{C}_s zurück zu \mathcal{C}_0 . Es entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, denn: Für einfachen Zusammenhang wird gefordert, dass jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne G zu verlassen. Das ist jetzt möglich, da wir den „Ring“ an einer Stelle zerschnitten haben.

Auf das Gebiet $G' = G \setminus \mathcal{C}_s$ mit der neuen Randkurve $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_s \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_s^-$ kann nun das Theorem 26.2a angewendet werden, welches zu $\int_{\partial G'} f(z) \, dz = 0$ führt. Dabei wird der Schnitt \mathcal{C}_s zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die Integrale über \mathcal{C}_s heben sich also weg. Es bleibt:

$$\int_{\partial G} f(z) \, dz = \int_{\partial G'} f(z) \, dz = 0$$

Dieses Konzept kann man auf endlich viele „Löcher“ verallgemeinern, indem man alle Löcher mit Schnitten verbindet. ■

Folgerung 26.3

1. Sei G ein beschränktes Gebiet und f in G holomorph. Ferner seien \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 zwei geschlossene, ganz in G verlaufende, punktfremde, stückweise stetig differenzierbare Kurven, die sich stetig ineinander deformieren lassen. (Man sagt, \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 sind **homotop**.) Dann gilt, wenn beide Kurven im selben Sinn durchlaufen werden:

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) \, dz$$

2. Seien G und f wie oben, $a \in G$ und \mathcal{C} eine geschlossene Kurve in G , die im Inneren den Kreis $K_r(a)$ enthält. $\partial K_r(a) = S_r(a)$ und \mathcal{C} seien homotop und werden in gleicher Richtung durchlaufen. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \, dz = \int_{S_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \, dz \quad \text{für}$$

Insbesondere ist:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a} \, dz = \int_{S_r(a)} \frac{1}{z-a} \, dz = 2\pi \cdot i$$

Beweis

1. Wir haben ein Gebiet mit einigen „Löchern“. \mathcal{C}_1 liegt in G und enthält \mathcal{C}_2 , aber keine „Löcher“. Im zweiten Fall liegt dieselbe Situation vor, jedoch enthalten \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 eins der „Löcher“. Im ersten Fall folgt $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) \, dz$ sofort. Problematischer ist die zweite Situation, diese kann man aber mit einem Schnitt \mathcal{C}_s zwischen \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 entschärfen. Es entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in dem f holomorph ist. Also kann man 26.2b auf den Rand $\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_s \oplus \mathcal{C}_2^- \oplus \mathcal{C}_s^-$ anwenden. (Die Orientierung von \mathcal{C}_2 muss geändert werden, damit die umschlossene Menge zur Linken liegt.) Wiederum fallen Integrale über \mathcal{C}_s weg; wir erhalten:

$$\int_{\partial G'} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz + \int_{\mathcal{C}_2^-} f(z) \, dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_1} f(z) \, dz = - \int_{\mathcal{C}_2^-} f(z) \, dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) \, dz$$

2. Nun liege in G eine Kurve \mathcal{C} (die keine „Löcher“ umschlieÙe) und darin der Kreis $K_r(a)$ mit dem Rand $S_r(a)$. Betrachte $\hat{G} := G \setminus \{a\}$, dieses Gebiet ist nicht mehr einfach zusammenhängend. In \hat{G} ist die Funktion $f(z)/(z-a)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ holomorph. Alle Behauptungen folgen aus dem ersten Teil; den Wert des letzten Integrals hatten wir bereits im Beispiel 26.1 abgeleitet. ■

Bemerkung

Beim Cauchyschen Integralsatz 26.2 kann man weder den einfachen Zusammenhang noch die Beschränktheit weglassen. Für den einfachen Zusammenhang siehe das Fundamentalbeispiel 26.1. Die Erkenntnis, dass die Beschränktheit vital ist, ist problematischer. Diesen Punkt diskutieren wir bei der Einführung des Punktes „Unendlich“.

Analog zum Reellen kann der Begriff der Stammfunktion eingeführt werden.

Definition 26.4

Sei f eine in einer offenen Menge $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ stetige Funktion. Man nennt f in \mathcal{U} **integrabel**, wenn es eine in \mathcal{U} holomorphe Funktion F gibt mit $F' = f$. F heißt **Stammfunktion** von f (in \mathcal{U}).

Satz 26.5 Eigenschaften der Stammfunktion

1. Sei G beschränkt und einfach zusammenhängend, und f in G holomorph. Für einen festen Punkt $z_0 \in G$ ist das folgende F eine Stammfunktion von f :

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta \quad \left(\begin{array}{l} \text{Integral längs einer beliebigen Kurve} \\ \mathcal{C} \subset G, \text{ die } z_0 \text{ und } z \text{ verbindet} \end{array} \right)$$

2. Zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich nur um eine Konstante.
3. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f , und \mathcal{C} eine Kurve in G mit dem Anfangspunkt z_1 und dem Endpunkt z_2 , dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(\zeta) \, d\zeta = F(z_2) - F(z_1)$$

Beweis

Wir setzen zusätzlich voraus, dass u und v (aus der Darstellung $f = u + iv$) stetig differenzierbar ist. (Dass f holomorph ist, impliziert ja nur totale Differenzierbarkeit von u und v sowie (CR).)

1. Mit $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ und $d\zeta = dx + idy$ erhält man wieder die Formel (26.2):

$$F(z) = \int_{z_0}^z (u \, dx - v \, dy) + i \cdot \int_{z_0}^z (v \, dx + u \, dy)$$

Die beiden Vektorfelder $(u, -v)^T$ und $(v, u)^T$ erfüllen in G die Integrabilitätsbedingungen (siehe Potential zu Vektorfeldern in Kapitel 8.3) wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Also haben beide Vektorfelder stetig differenzierbare Potentiale U und V .

$$U(x, y) = \int_{z_0}^z (u \, dx - v \, dy) \quad \text{und} \quad V(x, y) = \int_{z_0}^z (v \, dx + u \, dy)$$

Es gilt weiterhin $U_x = V_y = u$ und $V_x = -U_y = v$. Das heißt, dass $F = U + iV$ stetig differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt; also ist F holomorph mit $F' = U_x + iV_x = u + iv = f$. Also ist F die gesuchte Stammfunktion.

2. Der Beweis geht genau wie im Reellen.
3. Wir nehmen die Punkte z_0, z_1 und z_2 . Ein Kurve \mathcal{C} verbindet z_1 und z_2 . Ein zweite Kurve läuft von z_1 nach z_0 , dann nach z_2 und schließt mit \mathcal{C}^- wieder zu z_1 . Sei F o.E.d.A. die Stammfunktion aus dem ersten Teil. Nach dem Integralsatz 26.2 gilt:

$$\int_{\mathcal{C}^-} f(z) \, dz + \int_{z_1}^{z_0} f(z) \, dz + \int_{z_0}^{z_2} f(z) \, dz = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_{z_0}^{z_2} f(z) \, dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1)$$



Bemerkung

Die Voraussetzungen im vorigen Satz sind eigentlich zu stark. (Sie werden benutzt, damit man besonders den Zusammenhang mit Potentialen sieht.) Man kann den Satz auch wie folgt abschwächen.

Satz 26.5a

Sei G ein Gebiet und f in G stetig. Für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C} \subset G$ sei $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.

Beweis

$a \in G$ fest, $z \in G$ beliebig. Sei \mathcal{C}_z eine Kurve, die a mit z verbindet. Setze:

$$F(z) := \int_{\mathcal{C}_z} f(\zeta) d\zeta = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

Zu zeigen ist, dass F eine Stammfunktion von f ist, das heißt: $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in G$. Für ein z , das hinreichend nah bei z_0 liegt, liegt die Strecke $\overline{z_0 z}$ ganz in G . Dann gilt für die folgende geschlossene Kurve:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_z \oplus \overline{z_0 z} \oplus \mathcal{C}_{z_0} \subset G \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

Dann gilt:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\mathcal{C}_z} f(z) dz - \int_{\mathcal{C}_{z_0}} f(z) dz = \int_{\overline{z_0 z}} f(z) dz$$

Das verbleibende Integral lässt sich einfach berechnen, da durch $z(t) = z_0 + t \cdot (z - z_0)$ (auf $[0, 1]$) eine Parameterdarstellung von $\overline{z_0 z}$ vorliegt.

$$F(z) - F(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t \cdot (z - z_0)) \cdot (z - z_0) dt = (z - z_0) \cdot \underbrace{\int_0^1 f(z_0 + t \cdot (z - z_0)) dt}_{=: A(z)}$$

Hierdurch ist eine Funktion $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, für die $A(z_0) = f(z_0)$ gilt. Wir zeigen, dass A in z_0 stetig ist, denn dann folgt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} A(z) = A(z_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = A(z) \quad \xrightarrow{(z \rightarrow z_0)} \quad A(z_0) = f(z_0) \quad \Rightarrow \quad F'(z_0) = f(z_0)$$

Es gilt:

$$|A(z) - A(z_0)| = \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt - \int_0^1 f(z_0) dt \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| \cdot \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1}$$

Da f stetig ist, wird der rechts stehende Ausdruck klein, wenn z nahe an z_0 ist, also ist A stetig in z_0 . ■

Theorem 26.6 Cauchysche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, f in G holomorph und $\mathcal{C} \subset G$ eine geschlossene Kurve, deren Inneres ganz in G liegt. Dann gilt für alle z im Inneren dieser Kurve:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (26.3)$$

Beweis

Sei $K_r(z)$ ein Kreis im Inneren von \mathcal{C} , mit der Randkurve $S_r(z)$. Nach Folgerung 26.3.2 gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\int_{S_r(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{=2\pi i \cdot f(z)} \quad (*)$$

Das erste Integral können wir mithilfe der Kurvenlänge $L(S_r(z)) = 2\pi r$ abschätzen. Zusätzlich nutzen wir aus, dass auf $S_r(z)$ gilt: $|1/(\zeta - z)| = 1/r = \text{const.}$

$$\left| \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \cdot \sup_{\zeta \in S_r(z)} |f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

In (*) können wir nun r gegen Null gehen lassen und erhalten:

$$\int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

■

Theorem 26.6a Allgemeine Cauchysche Integralformel

G und f mögen die Voraussetzungen von Theorem 26.2b erfüllen. (Also: $G \subset \mathbb{C}$ ist ein beschränktes Gebiet, f ist auf G holomorph und auf ∂G stetig.) Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in G \\ 0 & z \notin \overline{G} \end{cases} \quad (26.4)$$

Beweis

Auch hier ist das Konzept, durch Schnitte zwischen Berandungskurven von G ein einfach zusammenhängendes Gebiet zu erzeugen. z soll auf keinem der Schnitte liegen.

- Für $z \in G$ kann 26.6 angewendet werden.
- Für $z \in \partial G$ ist keine allgemeine Aussage möglich.
- In dem Falle, das $z \notin \overline{G}$ ist, ist der Integrand auf ∂G stetig und in G holomorph. Auch hier kann man die passende Variante des Cauchyschen Integralsatzes anwenden.

■

Bemerkung

zur Interpretation von (26.3) und (26.4)

Die Funktionswerte einer holomorphen Funktion sind durch die Werte auf dem Rand eindeutig bestimmt. Später werden wir sogar sehen, dass für zwei beliebige holomorphe Funktionen ein kleines Intervall oder sogar eine konvergente Punktfolge genügt, auf dem beide Funktionen gleich sind, damit die Funktionen insgesamt gleich sind.

Beispiel 26.2

Anwendung zur Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z \cdot (1-z)^3} dz$$

ist zu berechnen. Hierbei ist $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ wieder die Exponentialfunktion, definiert als analytische Funktion mit unendlich großem Konvergenzradius. Analog definiert man $\sin z$ und $\cos z$ durch Potenzreihen. Diese Funktionen sind alle auf dem ganzen \mathbb{C} holomorph. Wir benutzen nun die Cauchysche Integralformel:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta$$

Zur Anwendung in unserem Beispiel setzen wir $a = 0$ sowie $f(z) = e^z/(1-z)^3$ und integrieren über die Kurve $\mathcal{C} = S_{1/2}(0)$. $f(z)$ ist im Kreis $S_{1/2}(0)$ natürlich holomorph.

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_{1/2}(0)} \frac{e^z}{z \cdot (1-z)^3} dz$$

Rechts steht bis auf den Divisor $2\pi i$ genau das Integral, was wir suchen. Dessen Wert ist deswegen $2\pi i$.

Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. In Kapitel 28 wird auf anderem Wege gezeigt, dass f sogar analytisch ist. Der folgende Satz zeigt, analog zur reellen Variante, dass man Integration und Differentiation miteinander vertauschen kann.

Satz 26.7

Sei f eine Funktion von zwei komplexen Variablen $w \in \mathcal{C}$ und $z \in G$, wobei \mathcal{C} eine kompakte Kurve in G ist. f sei in z und w stetig und für alle $z \in G$ nach z stetig differenzierbar. Dann ist $F(z) := \int_{\mathcal{C}} f(w, z) dw$ für alle $z \in G$ komplex differenzierbar und es gilt:

$$F'(z) = \frac{dF}{dz} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} dw$$

Zum Beweis muss man den Differenzenquotienten direkt abschätzen.

Theorem 26.8

Cauchysche Integralformel für die Ableitungen einer holomorphen Fkt.

Jede in G holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Für $z \in G$ und $K_r(z) \subset G$ gilt dann:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (26.5)$$

Beweis

für $n = 1$, Verallgemeinerung iterativ

Betrachte die Cauchysche Integralformel in der Form:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Das obige Integral erfüllt alle Voraussetzungen des Integranden in Satz 26.8. Der Integrand ist sogar beliebig oft nach z differenzierbar. Die Ableitung sieht wie folgt aus:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(w)}{w - z} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$

■

Es existiert eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes.

Satz 26.9 Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f in G stetig so, dass $\int f(z) dz$ lokal wegunabhängig ist, das heißt: Zu jedem Punkt $z_0 \in G$ gibt es einen Kreis $K \subset G$ um z_0 , in dem $\int f(z) dz$ wegunabhängig ist. Dann ist f in G holomorph.

Beweis

Aus dem Satz 26.5 (allgemeine Variante) folgt, dass f in K eine Stammfunktion F besitzt, das heißt, dass $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in K$ ist. Das heißt F ist in z_0 (sogar in K) holomorph, also ist auch f in z_0 holomorph. Da $z_0 \in G$ beliebig ist, ist f in ganz G holomorph. ■

27 Einige elementare Funktionen

Unproblematisch sind Polynome in z und rationale Funktionen. Die wichtigsten Beispiele holomorpher Funktionen sind die Potenzfunktionen.

27.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Betrachte die bekannte Potenzreihe:

$$E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (27.1)$$

Diese Potenzreihe konvergiert in ganz \mathbb{C} und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Wir schreiben dann auch $E(z) =: e^z$. Wir wollen einige einfache Eigenschaften der Exponentialfunktion aufschreiben:

1. $E'(z) = E(z)$ (durch gliedweise Differentiation von (27.1))
2. $E(0) = 1$ (trivial)
3. $E(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (nicht trivial)

Betrachte zum Beweis die Funktion $f(z) := E(-z) \cdot E(w+z)$ mit einem beliebigen festen $w \in \mathbb{C}$. Mit der Produktregel und der Eigenschaft 1 erhält man:

$$f'(z) := -E(-z) \cdot E(w+z) + E(-z) \cdot E(w+z) = 0$$

f ist konstant, der Wert dieser Konstante ergibt sich aus:

$$E(-z) \cdot E(w+z) = f(0) = E(w) \quad (27.2)$$

Für $w = 0$ ist im Speziellen:

$$E(-z) \cdot E(z) = 1 \quad (27.3)$$

Dies gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, somit muss $E(z) \neq 0$ sein.

4. Es gilt das bekannte Exponentialgesetz:

$$E(z+w) = E(z) \cdot E(w) \quad (27.4)$$

Im Kapitel 3 wurde dies durch Reihenmultiplikation gezeigt. Mit (27.2) und (27.3) ist es einfacher:

$$E(-z) \cdot E(z+w) \stackrel{(27.2)}{=} 1 \cdot E(w) \stackrel{(27.3)}{=} E(-z) \cdot E(z) \cdot E(w)$$

5. Aus (27.3) folgt unmittelbar $E(-z) = E(z)^{-1}$.

Bevor wir weitere Eigenschaften untersuchen, werden die sin- und cos-Funktionen eingeführt.

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} \quad (27.5)$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} \quad (27.6)$$

Beide Funktionen sind auf dem gesamten \mathbb{C} konvergent und holomorph. Es gilt:

1. $\sin(-z) = -\sin z$ und $\cos(-z) = \cos z$
2. $(\sin z)' = \cos z$ und $(\cos z)' = -\sin z$

Aus den Formeln (27.5) und (27.6) erhält man:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad (27.7)$$

Jetzt kann die Exponentialfunktion durch Sinus und Kosinus ausgedrückt werden. Umgekehrt gilt:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (27.8)$$

Satz 27.1 Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. Die einzigen Perioden der Exponentialfunktion E sind die Zahlen $2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
2. Der Wertebereich von E ist $W(E) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Genauer gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau ein z aus dem **Fundamentalstreifen** $S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ der Exponentialfunktion mit $E(z) = w$.
3. Durch die Abbildung $z \mapsto e^z$ wird das Innere von S eineindeutig (und konform) auf die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ abgebildet.

Beweis

1. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $E(z_1) = E(z_2)$, also $E(z_1 - z_2) = 1$. Wir setzen $w := z_1 - z_2 = x + iy$. Es ist zu zeigen, dass $w = 2k\pi i$ ist.

$$E(w) = e^w = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x \cdot \cos y = 1 \quad \text{und} \quad e^x \cdot \sin y = 0$$

Somit muss $\sin y = 0$ sein, das heißt $y = l\pi$ mit $l \in \mathbb{Z}$. Zudem muss $\cos y > 0$ sein (da sowohl e^x als auch das Produkt aus beiden positiv ist). Um dies zu erfüllen, muss $l = 2k$ sein. Dann ist $\cos y = 1$, also $e^x = 1$ und somit $x = 0$.

2. Aus 1. folgt, dass jeder Wert von E bereits in S angenommen wird. Um den Wertebereich zu finden, genügt es also, den Bereich S zu betrachten. Auf S ist E zudem injektiv, denn: Wenn es $z_1, z_2 \in S$ gäbe mit $E(z_1) = E(z_2)$, dann müsste $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ sein. Damit beide Punkte in S liegen, muss $k = 0$ sein, somit ist wieder $z_1 = z_2$. Zu zeigen: E bildet auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab. Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann existiert genau ein $y \in [-\pi, \pi] \subset S$ mit $y = \arg w$. Setze $x := \ln |w| \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $z = x + iy$:

$$E(z) = e^z = e^{x+iy} = e^{\ln|w|} \cdot (\cos y + i \sin y) = |w| \cdot e^{iy} = w$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass die Null nicht zum Wertebereich gehört:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |e^z| = |e^x| = e^x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \notin W(E)$$

3. **Konformität** (Winkeltreue der Abbildung) liegt vor, da die Ableitung nirgends verschwindet (Beweis für diesen Satz hier nicht):

$$\forall z \in \mathbb{C} : (e^z)' = e^z \neq 0$$

Zum Beweis verbleiben die Aussagen über die Abbildung des Inneren von S . Jede zur x -Achse parallele Gerade $\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$ wird eineindeutig abgebildet auf einen vom Nullpunkt ausgehenden Strahl $\{t \cos y_0 + it \sin y_0 : t = e^x > 0\}$. Dabei werden die beiden Geraden für $y = \pm\pi$ auf $\{z : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ abgebildet. ■

27.2 Die Logarithmusfunktion

Bei der Betrachtung der Umkehrfunktion treten typische Probleme auf, die zu ganz eigenständigen Teilgebieten der Funktionentheorie führen (siehe zum Beispiel: Riemannsche Flächen). Für einen Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir folgende Menge:

$$\operatorname{Log} w := E^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} : E(z) = w\}$$

Das heißt, für $z_0 \in \operatorname{Log} w$ ist $\operatorname{Log} w = \{z_0 + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. Wenn $w = r \cdot e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, dann ist $\operatorname{Log} w = \{\ln r + i\varphi + 2k \cdot i\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Zum Beispiel ist $\operatorname{Log} 1 = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

Allgemein würde man eine Funktion f als Umkehrfunktion von E bezeichnen, wenn $E(f(z)) = z$ für alle $z \neq 0$ ist. Folglich muss $f(z) \in \operatorname{Log} z$ sein. Das Problem ist, dass es auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich viele Funktionen gibt, die obige Gleichung erfüllen. Die meisten dieser Funktionen sind unstetig. Die Umkehrfunktion aber soll mindestens stetig sein.

Definition 27.2

Unter einem **Zweig der Logarithmusfunktion** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ versteht man eine in G stetige Funktion f , für welche $f(z) \in \operatorname{Log} z$ für alle $z \in G$ gilt. Die in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definierte Funktion

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi \quad \text{und} \quad z = r \cdot e^{i\varphi}$$

heißt **Hauptzweig der Logarithmusfunktion**.

Bemerkung

Man definiert häufig Ln auch für $z \in \mathbb{R}_-$ durch $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi = \ln r + i\pi$.

Worin besteht der Witz dieser Definition? Um eindeutig eine in G stetige Funktion f mit $f(z) \in \operatorname{Log} z$ zu definieren, muss man in der Lage sein, für $z \in G$ das Argument $\arg z$ so festzulegen, dass $z \mapsto \arg z$ stetig wird. Betrachten wir den Hauptzweig, d.h. wir suchen die Werte in S . Angenommen, wir hätten $z \in \mathbb{R}_-$ und betrachten die Umgebung $U(z)$ und deren Bild. Dieses Bild ist in zwei Teile zerteilt, eines an der „Oberkante“ von S und eines an der „Unterkante“ von S .

Wir haben es in Zukunft immer mit dem Hauptzweig zu tun. Jeder Zweig f der Logarithmusfunktion ist in seinem Definitionsbereich holomorph mit $f'(z) = 1/z$. Die üblichen Logarithmusgesetze gelten im Komplexen nicht mehr. Wie im Reellen nutzt man die Logarithmusfunktion, um allgemeine Potenzen zu definieren: Für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ setze

$$a^b = E(b \cdot f(a)) = e^{b \cdot f(a)}$$

Als Zahlenmengen hätte man $\{a^b\} = e^{b \cdot \text{Log } a}$. Wählt man den Hauptzweig f der Logarithmusfunktion, dann ist:

$$a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

Beispiel 27.1

Zwei triviale Beispiele

- Für $z = i$ ist $r = 1$, $\ln r = 0$ und $\arg i = \pi/2$. Damit ist $\text{Ln } i = \ln r + i\varphi = i \cdot \pi/2$.
- $3^i = e^{i \cdot \text{Ln } 3} = e^{i \cdot \ln 3}$

28 Einige Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Lemma 28.1

Sei $h : S_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann besitzt die Funktion:

$$H(z) := \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

die beiden folgenden Reihenentwicklungen:

1. Im Innengebiet $\{z : |z - a| < r\}$ ist

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \quad (28.1)$$

Diese Reihe konvergiert *gleichmäßig* in jedem Kreis $\{z : |z - a| \leq r_1 < r\}$.

2. Im Außengebiet $\{z : |z - a| > r\}$ gilt:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - a)^k} \quad \text{mit} \quad b_k = - \int_{S_r(a)} h(\zeta) \cdot (\zeta - a)^{k-1} d\zeta \quad (28.2)$$

Diese Reihe konvergiert *gleichmäßig* in jeder Menge der Form $\{z : |z - a| \geq r_2 > r\}$.

Beweis durch Standardtrick mit der geometrischen Reihe

Sei z im Inneren, das heißt $|z - a| < |\zeta - a| = r$. Dann gilt:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig, wie in 1. beschrieben. Damit kann man Integral und Summe vertauschen. Dann ist:

$$H(z) = \int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} dz = \int_{S_r(a)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z - a)^k \right] d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{S_r(a)} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \right] \cdot (z - a)^k$$

Im Außengebiet gilt $|z - a| > |\zeta - a| = r$ und damit in Analogie zu innen:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}$$



Satz 28.2

Jede in G holomorphe Funktion f besitzt innerhalb jedes Kreises $K_r(a) \subset G$ eine Potenzreihenentwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad (28.3)$$

Die Potenzreihe konvergiert im größten Kreis (dem **Konvergenzkreis**), der noch ganz in G liegt. Die Entwicklung (28.3) ist die **Taylorentwicklung** von f an a und es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (28.4)$$

Insbesondere ist also jede holomorphe Funktion analytisch.

Beweis

Man wende das Lemma 28.1 auf die Funktion $H = f/2\pi i$ an. Dann erhält man gemäß der Cauchyschen Integralformel:

$$2\pi i \cdot H(z) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Man erhält sofort die Gleichung (28.3). Die Koeffizienten a_k ergeben sich entweder aus der Formel für a_k in (28.1) und der Cauchyschen Integralformel für die Ableitungen, oder aus der Tatsache, dass man die Potenzreihe im Inneren gliedweise beliebig oft differenzieren kann. ■

Bemerkung

1. Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt mindestens ein Punkt, in dem die Funktion nicht holomorph ist. Wenn nicht, könnte man einen noch größeren Kreis wählen, der immer noch ganz in G liegt.
2. Wenn f in eine Potenzreihe entwickelt ist, welche den Konvergenzkreis $K_R(z_0)$ besitzt, dann ist f auch an einem beliebigen $z_1 \in K_R(z_0)$ entwickelbar. Die neue Potenzreihe hat den Konvergenzradius r , welchen man wie folgt abschätzen kann:

$$r \geq R - |z_1 - z_0|$$

Beispiel 28.1 zum zweiten Bemerkungspunkt

Die reelle Funktion f mit $f(x) = 1/(1 + x^2)$ lässt sich an $x = 0$ entwickeln zu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist 1, was im Reellen unverständlich ist, schließlich ist f auf ganz \mathbb{R} definiert, also sollte f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ entwickelbar sein. Im Komplexen hingegen wird die Größe des Konvergenzradius sofort deutlich, da die Funktion bei $z = -i$ und $z = i$ Singularitäten hat. Wenn wir die Funktion nun in einem anderen Punkt $x' \neq 0$ entwickeln, kann der Konvergenzradius so groß gewählt werden, dass $z = -i$ und $z = i$ gerade vom Konvergenzkreis ausgeschlossen sind. Damit kann man schrittweise jeden Punkt des \mathbb{C} (außer $z = i$ und $z = -i$) mit Potenzreihenentwicklungen von f versehen.

Satz 28.3 Identitätssatz für holomorphe Funktionen (erste Fassung)

Sei f in G holomorph. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f \equiv 0$ in G
2. Es existiert ein $a \in G$ mit $f^{(k)}(a) = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$
3. Es gibt eine Menge $N \subset G$ mit mindestens einem Häufungspunkt in G , für die $f \equiv 0$ auf N ist.

Satz 28.3' Identitätssatz für holomorphe Funktionen (zweite Fassung)

f und g seien in G holomorph. Dann sind folgende Formulierungen äquivalent:

1. $f = g$ in G
2. Es existiert ein $a \in G$ mit $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$
3. Es gibt eine Menge $N \subset G$ wie in Satz 28.3.3, sodass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in N$ ist.

Die zweite Fassung folgt aus der Betrachtung von $f - g$.

Beweis zur ersten Fassung

Trivialerweise folgen aus 1. die anderen Behauptungen.

Aus 2. folgt 3.: Aus 3. folgt, bei Entwicklung um a :

$$f(z) = \sum_n a_n (z - a)^n$$

z ist aus dem Konvergenzkreis. Nun ist aber nach 2. $a_n = 0$ für alle n . Damit ist $f = 0$ im Konvergenzkreis und es folgt 3.

Aus 3. folgt 2.: Nach der Voraussetzung existiert eine Folge (z_n) mit $z_n \in N$, $z_n \rightarrow a \in G$, $z_n \neq a$ und $f(z_n) = 0$. Man kann f in a entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad (*)$$

Wir zeigen induktiv, dass alle a_n gleich Null sind, dann ist 2. erfüllt. Da f stetig ist, gilt:

$$a_0 = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$$

Seien nun $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k \cdot (z - a)^k + a_{k+1} \cdot (z - a)^{k+1} + \dots \\ &= (z - a)^k \cdot (a_k + a_{k+1} \cdot (z - a) + \dots) \end{aligned}$$

Dann gilt für alle z_n mit $n > n_0$ (so, dass z_n im Konvergenzkreis liegt):

$$0 = f(z_n) = (z_n - a)^k \cdot (a_k + a_{k+1} \cdot (z_n - a) + \dots)$$

Die erste Klammer ist ungleich Null, da die Folge (z_n) nur gegen a konvergiert, und damit ist:

$$0 = a_k + a_{k+1} \cdot (z_n - a) + \dots$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt $a_k = 0$. Beachte, dass der obige rechte Term wieder eine holomorphe Funktion darstellt. Damit ist 2. gezeigt.

Aus 2. folgt 1.: G ist ein Gebiet, also eine offene und zusammenhängende Menge (das heißt: es gibt keine Darstellung $G = G_1 \cup G_2$, wobei G_1 und G_2 beide nichtleer, offen und disjunkt sind).

Die folgende Schlussweise wird häufig benutzt: Betrachte eine Eigenschaft E , die Punkte $z \in G$ haben können oder nicht. Sei $M = \{z \in G : z \text{ hat Eigenschaft } E\}$. Wenn man von M zeigen kann, dass M nichtleer und gleichzeitig offen und in G relativ abgeschlossen ist (letzteres heißt: alle Häufungspunkte von M , die in G liegen, gehören auch zu M), dann ist $M = G$.

Denn: Wäre $M \neq G$, dann wären $M \neq \emptyset$ und $G \setminus M = G_1$ beide nichtleer. Dann setzen wir $G_2 := M$. Dann gilt $G = G_1 \cup G_2$ und $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, wobei G_2 offen und G_1 (relativ) offen ist. Somit wäre G nicht zusammenhängend.

Dieses Schlussprinzip wenden wir nun wie folgt an:

$$M := \left\{ z \in G : f^{(k)}(z) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots \right\}$$

Diese Menge M ist nichtleer, denn $a \in M$. M ist relativ abgeschlossen, denn: Sei $u \in G$ ein Häufungspunkt in M , d.h. es gibt eine Folge (u_n) aus M mit $u_n \rightarrow u$. Somit ist $f^{(k)}(u_n) = 0$ für alle k und alle n . Da alle Ableitungen stetig sind, gilt für $n \rightarrow \infty$: $f^{(k)}(u_n) \rightarrow f^{(k)}(u) = 0$, also liegt $u \in M$. Es fehlt nur noch, dass M offen ist. Sei $b \in M$. Um b entwickeln wir f in eine Potenzreihe:

$$f(z) = \sum_k b_k \cdot (z - b)^k \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!} = 0 \quad \forall k$$

Also ist $f \equiv 0$ im ganzen (offenen) Konvergenzkreis um b . In diesem Kreis ist also $f^{(k)}(z) = 0$, also gehört der Konvergenzkreis zu M . Somit ist M (relativ) offen in G . Insgesamt ist also $M = G$, somit ist $f \equiv 0$ in G . ■

Der Identitätssatz besagt also: Eine auf dem Gebiet G holomorphe Funktion f ist bereits eindeutig bestimmt, wenn man f auf einer (beliebig kleinen) Menge mit der Eigenschaft von N aus 28.3.3 kennt.

Folgerung 28.4 Eindeutige Fortsetzung aus dem Reellen

Es gibt höchstens eine holomorphe Funktion F in einem Gebiet G , die mit einer vorgegebenen reellen Funktion f auf einem Intervall $(a, b) \subset G$ übereinstimmt. Wenn dieses f auf (a, b) reell-analytisch ist, dann existiert genau eine Fortsetzung.

Beweis

Der erste Teil ist einfach: Seien F_1 und F_2 zwei Fortsetzungen von f , dann wäre $F_1|_{(a,b)} = F_2|_{(a,b)} = f$. Dann folgt $F_1 = F_2$ aus 28.3' (mit $(a, b) = N$).

Zum zweiten Teil: Da holomorphe Funktionen analytisch sind, muss f notwendigerweise (reell-)analytisch sein. Nun sei f (reell-)analytisch: Zu jedem $x_0 \in (a, b)$ existiert im Konvergenzkreis $K_{r(x_0)}(x_0) \subset \mathbb{R}$ (welcher eigentlich ein Konvergenzintervall ist!) eine Potenzreihenentwicklung:

$$f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Definiere auf $K_{r(x_0)}(x_0) \subset \mathbb{C}$ die Funktion:

$$F(x_0)(z) := \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (z - x_0)^n$$

Diese Potenzreihe konvergiert in dem Kreis $K_{r(x_0)}(x_0)$. Seien nun $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $K_{r(x_1)}(x_1) \cap K_{r(x_2)}(x_2) \neq \emptyset$. In diesem Schnitt liegt ein Teilintervall I von (a, b) . Dann gilt für alle $x \in I$:

$$F_{x_1}(x) = F_{x_2}(x) = f(x)$$

Nach dem Identitätssatz ist folglich $F_{x_1}(z) = F_{x_2}(z)$ auf dem Durchschnitt der jeweiligen Konvergenzkreise (im \mathbb{C}). Nun setzen wir:

$$G := \bigcup_{x \in (a, b)} K_{r_x}(x) \supset (a, b) \quad \text{und} \quad F(z) := F_x(z) \quad \text{für} \quad z \in K_{r_x}(x)$$

Die Funktion F ist holomorph in G und $F|_{(a, b)} = f$. ■

Damit sind etwa Funktionen wie $e^z, \sin z, \dots$ die komplexen Fortsetzungen von $e^x, \sin x, \dots$

Bemerkung

Wie steht es bezüglich der Fortsetzung mit dem Logarithmus? Was erhalten wir, wenn $\ln x$ gemäß Folgerung 28.5 fortgesetzt wird? Wir erhalten den *Hauptwert/-zweig* der komplexen Logarithmusfunktion, denn auf $(0, \infty)$ ist $\ln x$ der Hauptwert und nach der Eindeutigkeit der Fortsetzung (Identitätssatz) muss also insgesamt der Hauptwert erhalten werden.

Definition 28.5

1. Eine Funktion f heißt **ganz**, wenn f in ganz \mathbb{C} holomorph ist. Das heißt: Die Potenzreihenentwicklung von f um ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ hat den Konvergenzradius $r(z_0) = \infty$.
2. f heißt **ganze rationale Funktion**, wenn f ein Polynom ist. Das heißt: Die Potenzreihenentwicklung von f um ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ hat nur endlich viele nicht verschwindende Glieder.
3. f heißt **ganze transzendente Funktion**, wenn f ganz, aber nicht ganz rational ist, das heißt f ist kein Polynom.

Satz 28.6 Satz von Liouville

Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis

Sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir betrachten wieder den Kreisring:

$$S_r(a) = \{z : |z - a| = r\} = \{z = a + r \cdot e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

Mit der Cauchy'schen Integralformel erhält man die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{S_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \\ \Rightarrow |f'(a)| &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(a+r \cdot e^{it})}{r^2 \cdot e^{2i \cdot t}} \cdot ir \cdot e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+r \cdot e^{it})|}{r^2} \cdot r dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi \\ &= \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Damit ist $f'(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$, also ist $f' = 0$ und somit $f = \text{const.}$ ■

Bemerkung

Dies ist ein drastischer Unterschied zum Reellen! Zum Beispiel ist $f(x) = \sin x$ im ganzen \mathbb{R} analytisch, beschränkt, jedoch nicht konstant. Dies ist aber kein Widerspruch, denn $f(z) = \sin z$ ist ganz, aber in \mathbb{C} unbeschränkt (zur Veranschaulichung schreibe $\sin z = 1/2 \cdot (\exp(iz) - \exp(-iz))$).

Zur Veranschaulichung der Anwendungsfälle des Satzes von Liouville dient der folgende Satz.

Satz 28.7 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante Polynom p , gegeben durch

$$p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0,$$

hat in \mathbb{C} mindestens eine Nullstelle.

Beweis

Angenommen, p hat keine Nullstelle, also $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f = 1/p$ eine ganze Funktion. Zu zeigen ist, dass f in \mathbb{C} beschränkt ist. Dann folgt nach Liouville, dass f und damit auch p konstant ist. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

$$f(z) = \frac{1}{z^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right)} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$$

Das heißt zum Beispiel: $|f(z)| < 1$ für ein $|z| > R$ mit einem beliebigen $R > 0$. Da f stetig ist, ist f auf der kompakten Menge $\{z : |z| \leq R\}$ beschränkt, das heißt f ist in \mathbb{C} beschränkt. ■

Eine zweite Anwendung des Satzes von Liouville der Beweis der Aussage, dass das Spektrum $\sigma(T)$ für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nicht leer ist.

29 Singularität holomorpher Funktionen

29.1 Der Punkt ∞

\mathbb{C} ist natürlich nicht kompakt. Für manche Betrachtungen ist das nachteilig. Der Ausweg ist die **Kompaktifizierung**. Um ein Bild für diese Kompaktifizierung zu bekommen, betrachten wir ein Modell für \mathbb{C} . Betrachte dazu im \mathbb{R}^3 die Einheitskugel $E = S_1(0) = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Identifiziere \mathbb{C} mit der x_1 - x_2 -Ebene.

Man führt jetzt vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ aus die **stereographische Projektion** π aus. Das bedeutet: Sei $P \in E$, betrachte die Gerade durch N und P und nenne den Schnittpunkt mit der x_1 - x_2 -Ebene $\pi(P)$. Umgekehrt: $z = (x_1, x_2)$ in der x_1 - x_2 -Ebene. Die Gerade durch z , N durchstößt E dann in einem eindeutig bestimmten Punkt $\pi^{-1}(z) = P$.

In einer Formel ausgedrückt: Sei $z = x + iy$ und $P = (x_1, x_2, x_3)$. Dann kann man nachrechnen:

$$x_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}$$

$$x = \frac{x_1}{1-x_3} \quad \text{und} \quad y = \frac{x_2}{1-x_3}$$

π ist eine eineindeutige Abbildung von $E \setminus \{N\}$ auf \mathbb{C} . E ist natürlich kompakt. Man nehme zu \mathbb{C} einen Punkt hinzu, nenne ihn ∞ und ordne $\pi(N) = \infty$ zu. Man nennt $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die **abgeschlossene Zahlenebene**. Im Kontext der Abbildung $\pi : E \rightarrow \mathbb{C}_0$ nennt man E die **Riemannsche Zahlenkugel**.

Jetzt wollen wir \mathbb{C}_0 zu einem kompakten Raum machen. Die Kompaktheitsdefinition erfordert die Definition von offenen Mengen in \mathbb{C}_0 . Dann können wir definieren: \mathbb{C}_0 ist kompakt, weil jede Überdeckung durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Offene Mengen kennt man, wenn man für jeden Punkt weiß, was Umgebungen sind, denn O ist offen, wenn zu jedem $u \in O$ eine Umgebung V von u existiert mit $V \subset O$. Umgebungen von Punkten in \mathbb{C} sind wie üblich definiert. Typische Umgebungen von ∞ sind:

$$U_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$$

Allgemein ist $U \subset \mathbb{C}_0$ eine Umgebung von ∞ , wenn ein $r > 0$ existiert mit $U_r(\infty) \subset U$. Man zeigt nun leicht: $O \subset \mathbb{C}_0$ mit $\infty \in O$ ist genau dann offen, wenn $\mathbb{C}_0 \setminus O$ in \mathbb{C} kompakt ist. Dann zeigt man \mathbb{C}_0 ist kompakt.

Bemerkung

Das Modell für diese **Einpunkt kompaktifizierung** für \mathbb{R} wäre ein Kreis.

Wir stellen folgende Rechenregeln auf:

- $\frac{a}{0} := \infty$ und $\frac{a}{\infty} := 0$
- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ für $a \neq 0$
- Nicht erklärt sind $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ und $\infty - \infty$.

Um Funktionen f an ∞ zu untersuchen, betrachtet man eine Hilfsfunktion f^* mit $f^*(z) := f(1/z)$, welche man dann an $z = 0$ untersucht.

Beispiel 29.1

Sei $f(z) = \sin 1/z$. Um die Stetigkeit zu zeigen setzt man: $f^*(z) = \sin z$. Diese Funktion ist stetig an $z = 0$, das heißt f ist stetig an ∞ .

Zur Differenzierbarkeit: Ist f^* an $z = 0$ differenzierbar, dann nennt man f an ∞ differenzierbar. Der Wert $f'(\infty)$ ist nicht definiert. (Manche Autoren setzen in solchen Fällen $f'(\infty) := 0$, wir nicht.)

29.2 Isolierte Singularitäten und Laurent-Entwicklung

Wichtig ist die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen in der Umgebung von Punkten, in denen die Funktionen nicht holomorph sind.

Beispiel 29.2 Typische Beispiele

Betrachte die Funktionen $f_1(z) = (z^2 - 1)/(z + 1)$, $f_2(z) = 1/z$ und $f_3(z) = \exp(1/z)$. Diese sind kritisch an den Punkten $z = -1$ (für f_1) und $z = 0$ (für f_2 und f_3), jedoch das Verhalten der Funktion an der kritischen Stelle ist signifikant unterschiedlich.

Theorem 29.1

Betrachte den Kreisring $K(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - a| < R \leq \infty\}$. (Die Extremfälle $r = 0$ und $R = \infty$ sollen mit eingeschlossen sein.) Die Funktion f sei in $K(a, r, R)$ holomorph. Für $r < \varrho < R$ seien definiert:

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_\varrho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta$$

Dann gilt:

1. Die a_k sind von ϱ unabhängig.
2. Für alle $z \in K(a, r, R)$ gilt die **Laurent-Entwicklung** von f im Ringgebiet $K(a, r, R)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} \quad (29.2)$$

Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

3. Beide Reihen in (29.2) konvergieren für alle $z \in K(a, r, R)$ absolut. Sie konvergieren gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von $K(a, r, R)$.

Bemerkung

Es ist nicht notwendig, dass f in a holomorph ist. Es ist auch keine Aussage darüber gemacht, wie sich f auf dem Rand $\partial K(a, r, R)$ verhält. Häufig schreibt man (29.2) als eine einzelne Reihe:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k$$

Beweis

Der Beweis der dritten Aussage steht in diversen Lehrbüchern.

1. Sei also $r < r_1 < \rho < R_1 < R$. Wir betrachten jetzt das Gebiet $K(a, r_1, R_1)$. Die Funktion $f(z)/(z - a)^{(k+1)}$ ist in $\overline{K}(a, r_1, R_1)$ holomorph.

$$\int_{\partial K(a, r_1, R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{(k+1)}} d\zeta = 0$$

Die Ränder der Menge $K(a, r_1, R_1)$ müssen (wie immer) so orientiert sein, dass die Menge zur Linken liegt. Daraus folgt:

$$\int_{S_{r_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta = \int_{S_{R_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta$$

2. Sei $z \in K(a, r, R)$ so, dass $r_1 < |z - a| < R_1$. Daraus folgt, dass f im abgeschlossenen Gebiet $\overline{K}(a, r_1, R_1)$ holomorph ist und mit der Cauchyschen Integralformel folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial K(a, r_1, R_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_{R_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_{r_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Jetzt wenden wir Lemma 28.1 wie folgt an: Im ersten Integral setzen wir $h(\zeta) := f(\zeta)/2\pi i$, z liegt im Innengebiet. Wir erhalten die erste Reihe in (29.2). Das zweite Integral entspricht der Hilfsfunktion $h(\zeta) := -f(\zeta)/2\pi i$, z liegt im Außengebiet; damit folgt die zweite Reihe aus (29.2). ■

Die Laurent-Entwicklung ist besonders interessant, wenn an der Stelle a eine sogenannte isolierte Singularität vorliegt.

Definition 29.2

Sei $a \in \mathbb{C}_0$ und f eine Funktion, für die es eine Umgebung $U(a)$ gibt, sodass f in der **punktierten Umgebung** $U(a) \setminus \{a\}$ von a holomorph ist. Dann heißt a **isolierte Singularität** von f .

Bei den kritischen Punkten in den drei Ausgangsbeispielen liegen zum Beispiel isolierte Singularitäten vor. Wir wollen natürlich auch $a = \infty$ in die Betrachtungen einbeziehen.

Bemerkung

Entwicklungen im Punkt ∞

1. Potenzreihenentwicklung: Ist f in ∞ holomorph, so ist $g(w) := f(1/w)$ in $w = 0$ holomorph, hat also eine Potenzreihenentwicklung, die im Inneren des Konvergenzkreises konvergiert. Wenn w im Inneren des Kreises ist, dann ist $1/w$ im Äußeren des Kreises. Das heißt, f hat eine Entwicklung in der Form:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Dabei ist z im Äußeren eines genügend großen Kreises (also einer Umgebung von ∞). Beispielhaft betrachten wir die Funktion $f(z) = \sin(1/z^2)$. Gesucht ist die Entwicklung an $z = \infty$. Der umständliche Weg wäre: $z = 1/w$ und damit die Reihe:

$$g(w) = \sin w^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot w^{4k+2} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4k+2}}$$

Der einfachere Weg ist, $\sin u$ aufzuschreiben und $u = 1/z^2$ einzusetzen.

Ein Beispiel für nichtisolierte Singularitäten ist $f(z) = 1/(\sin 1/z)$ mit den kritischen Punkten $z_n = 1/(2\pi n)$.

2. Laurent-Entwicklung: Sei $a = \infty$ eine isolierte Singularität von f . Das heißt, f ist in einer punktierten Umgebung von ∞ holomorph. Sei also G ein Gebiet, das ∞ enthält. Sei $K_r(0)$ der kleinste Kreis, sodass $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(0)} \subset G$ ist. Dann kann man auf dieser Menge $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(0)}$ das Theorem 29.1 (hier mit dem Extremfall $R = \infty$) anwenden. In diesem Gebiet hat f dann die Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}$$

Für die Koeffizienten gilt:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_\varrho(0)} f(z) \cdot z^{k-1} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \varrho > r$$

Zu diesen Termen gelangt man in der Praxis durch eine Hilfsfunktion $g(z) = f(1/z)$, die an 0 in eine Laurent-Reihe entwickelt und dann zurückschstituiert wird.

Definition 29.3

1. Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit der in $K(a, r, R)$ gültigen Laurententwicklung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

Dann heißt die erste Reihe **Nebenteil** der Laurententwicklung von f an a , die zweite Reihe ist der **Hauptteil**.

2. Ist $a = \infty$ die isolierte Singularität von f mit der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \cdot z^k$$

Dann ist die erste Reihe der **Nebenteil** und die zweite Reihe ist der **Hauptteil**.

Beispiel 29.3

Sei $f(z) = 1/(1-z)$. Singulär sind $z = 1$ und $z = \infty$. Die Laurent-Entwicklung von $z = 1$ ist:

$$f(z) = -\frac{1}{z-1}$$

An der Stelle $z = \infty$ ergibt sich die Laurententwicklung aus der Hilfsfunktion: $g(w) = f(1/w) = 1/(1-1/w) = w/(w-1)$. Diese Funktion ist an $w = 0$ holomorph, und die Laurententwicklung an $z = \infty$ ist:

$$g(w) = -\frac{w}{1-w} = -w \cdot \sum_{k=0}^{\infty} w^k = -\sum_{k=0}^{\infty} w^{k+1} \quad \Rightarrow \quad f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}}$$

Das steht im Einklang mit der Tatsache, dass g an $w = 0$ holomorph ist.

Bemerkung

Ist $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität, so kann man stets die Laurent-Entwicklung in dem Kreisring $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ (für ein geeignetes R) betrachten, das heißt: Es kann stets der Fall $r = 0$ betrachtet werden.

Definition 29.4 Klassifikation isolierter Singularitäten

Sei $a \in \mathbb{C}_0$ eine isolierte Singularität von f . Dann nennt man a :

1. **hebbare Singularität**, wenn alle Koeffizienten des Hauptteils verschwinden:

$$a_{-k} = 0 \quad \text{bzw.} \quad b_{-k} = 0 \quad \forall k \geq 1$$

2. **Polstelle** der Ordnung k , wenn für die Koeffizienten des Hauptteils gilt:

$$\begin{aligned} a_{-k} &\neq 0 & \text{und} & & a_{-l} &= 0 & \forall l > k & & (a \in \mathbb{C}) \\ b_{-k} &\neq 0 & \text{und} & & b_{-l} &= 0 & \forall l > k & & (a = \infty) \end{aligned}$$

Polstellen heißen auch *außerwesentliche* Singularität.

3. **wesentliche Singularität**, wenn der Hauptteil unendlich viele von 0 verschiedene Glieder hat.

Beispiele für isolierte Singularitäten

1. $z = -1$ ist eine isolierte Singularität der Funktion:

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 1} = \frac{(z - 1) \cdot (z + 1)}{z + 1} = z - 1 = -2 + (z - (-1))$$

Das ist die Laurent-Entwicklung an der Stelle $z = -1$. Wir haben keinen Hauptteil, also liegt eine hebbare Singularität vor.

2. Betrachte $f(z) = \sin z / z^2$ mit der isolierten Singularität $z = 0$. Zur Bestimmung der Laurent-Entwicklung an der Stelle $z = 0$ nutzen wir die bekannte Reihenentwicklung des Sinus:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} \mp \dots$$

Der Hauptteil ist $1/z$, und damit liegt ein Pol erster Ordnung an der Stelle $z = 0$ vor. Zum Vergleich: Die Funktion $g(z) = \sin z / z$ hat an der Stelle $z = 0$ eine hebbare Singularität.

3. Für Funktionen wie $f(z) = e^{1/z}$ oder $f(z) = \sin(1/z^2)$ liegen wesentliche Singularitäten an $z = 0$ vor. Die Laurent-Entwicklungen sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)^2}_{\text{Hauptteil}} + \dots \\ \sin \frac{1}{z^2} &= \underbrace{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6}}_{\text{Hauptteil}} + \dots \end{aligned}$$

4. Die Funktion $f(z) = 1/z^7 - 1/z + 4 + z$ hat bei $z = 0$ eine Polstelle siebter Ordnung. (Es ist nicht relevant, dass die Terme $O(1/z^6)$ bis $O(1/z^2)$ verschwinden; wichtig ist nur, dass nach $O(1/z^7)$ keine weiteren Beiträge kommen.)

Die Art einer isolierten Singularität lässt sich durch das Verhalten der Funktion in einer Umgebung beschreiben.

Satz 29.5 Satz von Riemann

Der Punkt $a \in \mathbb{C}_0$ ist genau dann eine hebbare Singularität von f , wenn es eine Umgebung $U(a)$ gibt, sodass f in $U(a) \setminus \{a\}$ holomorph und beschränkt ist (das ist genau dann der Fall, wenn $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existiert und endlich ist). Durch

$$f^*(a) = \begin{cases} a_0 & a \neq \infty \\ b_0 & a = \infty \end{cases} \quad \text{und} \quad f^*(z \neq a) = f(z)$$

wird eine in a holomorphe Funktion definiert, die in a **fortgesetzte Funktion**. Hierbei ist a_0 bzw. b_0 der erste Koeffizient des Nebenteils der Laurent-Entwicklung von f an der Stelle $z = a$.

Beweis für den Fall $a \in \mathbb{C}$ ($a = \infty$ läuft analog)

Die Hin-Richtung ist einfach: Es liegt nur eine Potenzreihe (sprich: der Nebenteil der Laurent-Entwicklung) vor. Diese Potenzreihe konvergiert in einem Kreis $K_r(a)$ und stellt dort eine holomorphe (also insbesondere stetige) Funktion dar. Diese Funktion ist somit in jeder Umgebung $U(a)$ mit kompaktem Abschluss $\overline{U(a)} \subset K_r(a)$ beschränkt. Diese Potenzreihe ist bereits die Funktion f^* (außerhalb von $K_r(a)$ kann f^* durch f fortgesetzt werden).

Sei nun $a \in \mathbb{C}$ und f in der punktierten Umgebung $\{z : 0 < |z - a| < r\}$ holomorph und beschränkt, das heißt: $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in U(a) \setminus \{a\}$. Die Laurent-Entwicklung von f an der Stelle $z = a$ ist:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - a)^k}$$

Für die Koeffizienten a_{-k} gilt:

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{S_\varrho(a)} f(\zeta) \cdot (\zeta - a)^{k-1} d\zeta \quad \forall \varrho \in (0, r), k \in \mathbb{N}$$

Mit der Parametrisierung $\zeta = a + \varrho \cdot e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ erhält man wie üblich:

$$|a_{-k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{2\pi} f(\zeta) \cdot \varrho^{k-1} \cdot e^{it \cdot (k-1)} \cdot i\varrho \cdot e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \varrho^k \cdot \int_0^{2\pi} dt = M \cdot \varrho^k$$

Da $\varrho > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $a_{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da der Hauptteil also verschwindet, liegt an $z = a$ eine hebbare Singularität vor. (Die Aussagen über f^* folgen nun sofort.) ■

Satz 29.6

Der Punkt $a \in \mathbb{C}_0$ ist genau dann ein Pol einer holomorphen Funktion f , wenn gilt: $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ ist. Das ist dann der Fall, wenn es zu jedem $C > 0$ eine Umgebung $U(a)$ gibt, in welcher $|f(z)| > C$ für alle $z \in U(a)$ gilt.

Beweis Beweisidee

Zur Hin-Richtung: $a \in \mathbb{C}$ sei ein Pol der Ordnung k und $C > 0$ gegeben. Die Laurent-Entwicklung an der Stelle $z = a$ lautet:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - a)^{k-1}} + \dots + \text{Nebenteil} = \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}} \cdot (z - a) + \dots \right)}_{=h(z)}$$

Der Faktor $h(z)$ ist in a holomorph und deswegen stetig, zudem gilt $h(a) = 1$. Somit existiert ein $\delta > 0$, für das die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $|h(z)| \geq 1/2$ für $|z - a| < \delta$
2. $|a_{-k}|/(2C + 1) \geq \delta^k$, also $|a_{-k}| \geq (2C + 1) \cdot \delta^k$

Dann gilt für alle z mit $0 < |z - a| < \delta$:

$$|f(z)| = \frac{|a_{-k}|}{|z - a|^k} \cdot |h(z)| \geq \frac{|a_{-k}|}{\delta^k} \cdot \frac{1}{2} \geq (2C + 1) \cdot \frac{1}{2} > C$$

Das heißt, dass für alle $C > 0$ existiert eine Umgebung $U(a) = \{z : |z - a| < \delta\}$ mit $|f(z)| > C$ für alle $z \in U(a) \setminus \{a\}$.

Zur Umkehrung: Sei nun $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$. Das heißt insbesondere: Es existiert eine Umgebung $V(a)$, sodass f in $V(a) \setminus \{a\}$ nicht verschwindet. Auf dieser punktierten Umgebung kann somit die holomorphe Funktion $1/f$ betrachtet werden, für welche $\lim_{z \rightarrow a} 1/f(z) \rightarrow 0$ geht. Das heißt: $z = a$ ist eine hebbare Singularität für die Funktion $1/f$, die sich deswegen holomorph in a fortsetzen lässt. (Diese fortgesetzte Funktion sei wieder mit $1/f$ bezeichnet.) Es gibt also eine Darstellung in der Form:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^n \cdot g(z)$$

Die Funktion g ist in $V(a)$ holomorph und verschwindet nicht in a . Auf alle Fälle ist $n \geq 1$, denn $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ wäre sonst nicht erfüllt. Hieraus folgt:

$$f(z) = (z - a)^{-n} \cdot h(z)$$

Hierbei ist $h = 1/g$ in einer Umgebung von a holomorph und ohne Nullstellen. Somit hat f an a eine Polstelle n -ter Ordnung.

Es verbleibt der Fall $a = \infty$, diesen behandelt man wieder mit der Betrachtung der Hilfsfunktion $g(z) := f(1/z)$, welche an $z = 0$ eine Polstelle hat. Alles kann somit auf den vorigen Fall zurückgeführt werden. ■

Bemerkung

Die folgende Charakterisierung von Polstellen ist oft sehr nützlich. a ist eine Polstelle der Ordnung k genau dann, wenn gilt:

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) \cdot (z - a)^k \neq 0$$

(Die Existenz beinhaltet insbesondere, dass der Grenzwert in \mathbb{C} liegt, was ∞ ausschließt.) Dann beachte:

$$(z - a)^k \cdot f(z) = (z - a)^k \cdot \left(\frac{a_{-k}}{(z - a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - a)^{k-1}} + \dots \right) = a_{-k} + a_{-k+1} \cdot (z - a) + \dots \xrightarrow{z \rightarrow a} a_{-k}$$

Satz 29.7 Satz von Casorati und Weierstraß

Der Punkt $a \in \mathbb{C}_0$ ist genau dann eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion f , wenn f in jeder beliebigen punktierten Umgebung von a jedem Wert aus \mathbb{C}_0 beliebig nahe kommt. (Das heißt, das Bild jeder punktierten Umgebung $U(a) \setminus \{a\} \subset D(f)$ unter f ist dicht in \mathbb{C}_0 .)

Beweis Betrachte nur \mathbb{C} .

Die Zielaussage der Hin-Richtung bedeutet: Für alle $c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und die Umgebung $U(a)$ (mit $U(a) \setminus \{a\} \subset D(f)$) existiert ein $z \in U(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z) - c| < \varepsilon$. (Das ist gerade die Dichtheit.)

Angenommen, dies ist falsch, das heißt: Es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(z) - c| > \varepsilon$ für alle $z \in U(a) \setminus \{a\}$ ist. Somit ist $g(z) := 1/(f(z) - c)$ in der punktierten Umgebung $U(a) \setminus \{a\}$ beschränkt. Also hat g in a eine hebbare Singularität und es existiert $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = b$. Die Funktion $f(z) = c + 1/g(z)$ hat an a also entweder eine hebbare Singularität ($b \neq 0$) oder einen Pol ($b = 0$). Dies ist ein Widerspruch.

Etwas schwieriger ist die Rückrichtung: Wenn $f(U(a) \setminus \{a\})$ für alle $U(a) \setminus \{a\}$ in \mathbb{C} dicht liegt, kann f natürlich auf keinem $U(a) \setminus \{a\}$ beschränkt sein. Also ist a nicht hebbar. Aber auch $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ ist nicht möglich, da in jeder Umgebung von a Punkte z liegen, für die $|f(z)|$ beliebig nahe bei Null liegt. Somit ist a auch kein Pol. ■

Beispiel 29.4

Die isolierte Singularität $z = 0$ von $f(z) = \exp(1/z)$ ist eine wesentliche Singularität, denn in jeder Umgebung von $z = 0$ werden alle Funktionswerte, also alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich oft angenommen.

Satz 29.8 Satz von Picard

$a \in \mathbb{C}_0$ ist genau dann eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion f , wenn f in jeder Umgebung von a jeden Wert aus \mathbb{C} – mit Ausnahme eventuell eines Punktes – unendlich oft annimmt.

Bemerkung

Der Beweis ist sehr aufwändig. Am Beispiel $e^{1/z}$ sieht man, dass es einen Ausnahmepunkt geben kann (in diesem Falle $a = 0$).

29.3 Der Residuensatz

Definition 29.9

Sei a eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f .

- Für $a \neq \infty$ sei $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k$ die Laurent-Entwicklung an a . Dann ist der Koeffizient $a_{-1} =: (\text{Res } f)(a)$ das **Residuum** von f an a .
- Für $a = \infty$ sei $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \cdot z^{-k}$ die entsprechende Laurent-Entwicklung. Dann ist der Koeffizient $-b_1 =: (\text{Res } f)(a)$ das Residuum von f an ∞ .

Bemerkung

Man beachte, dass im Falle $a = \infty$ das Residuum ein Koeffizient (bis auf „-“) im *Nebenteil* der Laurent-Entwicklung ist, ansonsten jedoch ein Koeffizient des *Hauptteils*.

Ist f holomorph in $a \in \mathbb{C}$, so ist $(\text{Res } f)(a) = 0$. Für $a = \infty$ muss dies nicht der Fall sein, zum Beispiel ist für $f(z) = 1/z$ das Residuum $(\text{Res } f)(\infty) = -1$. Im Allgemeinen muss der Punkt ∞ immer separat untersucht werden.

Theorem 29.10 Einfachste Variante des Residuensatzes

Sei \mathcal{C} eine geschlossene stückweise glatte Kurve, die ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}_0$ berandet. In G und auch \mathcal{C} sei f holomorph bis auf eine isolierte Singularität $a \in G$. (Falls $\infty \in G$, dann sei $a = \infty$.) Wird \mathcal{C} so orientiert, dass G zur Linken liegt, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot (\text{Res } f)(a) \quad (29.3)$$

Beweis

Zunächst betrachten wir den Fall $a \neq \infty$. Wir wählen einen kleinen Kreis $K \subset G$ um a mit der Randkurve S . Dann kann der Cauchysche Integralsatz angewendet werden:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_S f(z) dz$$

Die Laurent-Entwicklung von f an der Stelle a laute $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k$; sie konvergiert auf der kompakten Menge S gleichmäßig. Somit ist gliedweise Integration möglich.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_S f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \int_S (z-a)^k dz$$

Diese Integrale verschwinden außer für $k = -1$. In diesem Fall ist $\int = 2\pi i$ (siehe Fundamentalbeispiel). Für das Integral verbleibt also:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot (\text{Res } f)(a)$$

Jetzt sei $a = \infty$. Man erhält wieder:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{S^-} f(z) dz$$

S^- ist ein Kreis um Null mit der selben Richtung wie \mathcal{C} . Die Laurent-Entwicklung lautet:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot z^{-k}$$

Analog zum ersten Fall erhält man durch gliedweise Integration:

$$\int_{S^-} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{S^-} z^{-k} dz = b_1 \int_{S^-} \frac{1}{z} dz = b_1 \cdot (-2\pi i) = 2\pi i \cdot (\text{Res } f)(\infty)$$

■

Diesen Satz benutzt man, um den allgemeinen Residuensatz zu zeigen:

Theorem 29.11 Allgemeiner Residuensatz

Sei $G \subset \mathbb{C}_0$ ein Gebiet, das von endlich vielen geschlossenen, stückweise glatten Kurven $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ ohne gemeinsame Punkte berandet wird. Die \mathcal{C}_i seien so orientiert, dass G zur Linken liegt. f sei auf den \mathcal{C}_i stetig und in G holomorph, bis auf endlich viele isolierte Singularitäten a_1, \dots, a_m . (Für $\infty \in G$ sei $\infty \in \{a_1, \dots, a_m\}$). Dann gilt:

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m (\text{Res } f)(a_k) \quad (29.4)$$

Beweis

Man lege um jede der Singularitäten a_i ($i = 1, \dots, m$) jeweils einen Kreis S_i , der einschließlich seines Inneren K_i ganz in G liegt und so orientiert ist, dass die Singularität a_i zur Linken liegt. (Für $a_i = \infty$ sei K_i das Äußere von S_i .)

Damit ist $G' = G \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{K_i}$ ein beschränktes Gebiet, das berandet wird von den C_1, \dots, C_n und S_1, \dots, S_m . Somit kann man den Cauchyschen Integralsatz auf G' anwenden.

$$0 = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(z) dz + \sum_{j=1}^m \int_{S_j^-} f(z) dz \Rightarrow \int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{S_j} f(z) dz \stackrel{(29.3)}{=} 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^m (\operatorname{Res} f)(a_j)$$

■

Bemerkung

Durch die spezielle Behandlung des Punktes $z = \infty$ bei der Definition des Residuums konnte der Residuensatz konsistent formuliert werden, auch für den Fall $\infty \in G$.

Um den Residuensatz wirksam zur Berechnung von Integralen anwenden zu können, benötigt man Hilfsmittel und Erfahrung bei der Berechnung von Residuen.

1. Die Laurent-Entwicklung muss wenigstens so weit erzeugt werden, dass der Koeffizient von $1/z$ bekannt ist (Hinweis: Einsatz bekannter Entwicklungen). Dies geht besonders bei Polen einfach.

Beispiel 29.5

Sei $f(z) = (4z^3 + z + 1) \cdot \sin 1/z$. Die Aufgabe ist, das Residuum zu bestimmen. $z = 0$ ist eine wesentliche Singularität, denn dort lautet die Laurent-Entwicklung:

$$(4z^3 + z + 1) \cdot \sin \frac{1}{z} = (4z^3 + z + 1) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \dots \right)$$

Nach Ausmultiplizieren steht bei $1/z$ der Koeffizient $(\operatorname{Res} f)(z = 0) = 1$.

2. Wir unterscheiden drei Fälle: Zunächst habe f an $a \in \mathbb{C}$ einen Pol erster Ordnung. Dann sieht die Laurent-Entwicklung wie folgt aus:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1 \cdot (z-a) + \dots \Rightarrow (z-a) \cdot f(z) = a_{-1} + a_0 \cdot (z-a) + a_1 \cdot (z-a)^2 + \dots$$

Somit ist $a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z)$.

Beispiel 29.6

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 - 1}{(z-1) \cdot (z-2)}$$

Es gibt zwei isolierte Singularitäten bei $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$, also ist:

$$(\operatorname{Res} f)(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 + z^2 - 1}{z-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Sei nun allgemein $f = g/h$, wobei g und h in a holomorph sind und h in a eine Nullstelle erster Ordnung hat. Damit hat f bei a einen Pol erster Ordnung.

$$(\operatorname{Res} f)(a) = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \cdot \frac{g(z)}{h(z)} \right] \stackrel{(h(a)=0)}{=} \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

3. Man kann 1. weiter verallgemeinern: f habe an $a \neq \infty$ eine Polstelle m -ter Ordnung. Dann erhält man:

$$(\operatorname{Res} f)(a) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m \cdot f(z) \right) \quad (*)$$

Der Pol m -ter Ordnung heißt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + \dots \\ (z-a)^m \cdot f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1} \cdot (z-a) + \dots + a_{-1} \cdot (z-a)^{m-1} + a_0 \cdot (z-a)^m + \dots \end{aligned}$$

Das Residuum erhält man durch $(m-1)$ -faches Ableiten.

Beispiele zum Residuensatz

1. $I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4} dz$

Dieses Integral kann natürlich mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen bestimmt werden ($n=3$).

$$I = \frac{2\pi i}{3!} \cdot \left. \frac{d^3 e^z}{dz^3} \right|_{z=0} = \frac{\pi i}{3}$$

Weiter kann man das Integral auch mit dem Residuensatz berechnen. Dazu benötigt man das Residuum der Funktion an der isolierten Singularität $a=0$:

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \frac{1}{3! \cdot z} + \dots \Rightarrow (\operatorname{Res} f)(0) = \frac{1}{3!} \Rightarrow I = \frac{\pi i}{3}$$

2. $I = \int_{|z-2|=7} \left[z^2 \cdot e^{1/z} + \frac{\cos z}{z^3 \cdot (z-\pi)^2} \right] dz = I_1 + I_2$

Das Teilintegral I_1 hat eine wesentliche Singularität in $a=0$:

$$z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3! \cdot z} + \dots \Rightarrow (\operatorname{Res} f)(0) = \frac{1}{3!} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi i}{3}$$

Beim Teilintegral I_2 liegen zwei Singularitäten vor, ein dreifacher Pol bei $a=0$ und ein zweifacher Pol bei $a=\pi$. Beide liegen im Kreis $|z-2| < 7$, müssen also bei der Integration berücksichtigt werden. Wir nehmen die Formel (*) aus dem Spezialfall 3:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Res} \frac{\cos z}{z^3 \cdot (z-\pi)^2} \right) (0) &= \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{(z-\pi)^2} \right|_{z=0} = \frac{6-\pi^2}{2\pi^4} \\ \left(\operatorname{Res} \frac{\cos z}{z^3 \cdot (z-\pi)^2} \right) (\pi) &= \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{z^3} \right|_{z=\pi} = \frac{3}{\pi^4} \\ I_2 &= 2\pi i \cdot \left[\frac{6-\pi^2}{2\pi^4} + \frac{3}{\pi^4} \right] = i \cdot \frac{12-\pi^2}{\pi^3} \end{aligned}$$

Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

Es ist ein Integral der folgenden Form zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx$$

Falls dieser implizite Grenzwert nicht existiert, besteht die Möglichkeit, den Cauchyschen Hauptwert zu bestimmen, indem der Grenzprozess in beiden Richtungen synchronisiert wird:

$$(H) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Der Trick besteht darin, die Integration in den \mathbb{C} zu übertragen und dort einen anderen Integrationsweg zu wählen. Um dieses Konzept zu verdeutlichen, wollen wir zunächst ein Beispiel diskutieren.

Beispiel 29.7

Betrachtet wird das bekannte Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Dieses Integral soll nun mithilfe des Residuensatzes bestimmt werden. Wir stellen uns zum einen die Kurve \mathcal{C}_1 auf der reellen Achsen zwischen $-R$ und R vor (die im Integral des Cauchyschen Hauptwertes vorkommt), zum anderen einen Halbkreis \mathcal{C}_2 . Die Parameterdarstellungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : z(t) &= t & \text{mit } -R \leq t \leq R \\ \mathcal{C}_2 : z(t) &= R \cdot e^{it} & \text{mit } 0 \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

Beide Kurven ergeben zusammen eine geschlossene Kurve \mathcal{C} . Beide Kurven sind so orientiert, dass die von \mathcal{C} eingeschlossene Fläche, von \mathcal{C} aus gesehen, immer zur Linken liegt.

An der Stelle $z = i$ liegt eine Polstelle des Integranden vor. Man berechnet nun das Residuum:

$$\text{Res } f(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}$$

Somit ergibt das Integral mit dem Residuensatz:

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{1+z^2} dz$$

Um auf das Integral über \mathcal{C}_1 zu kommen, muss das Integral über \mathcal{C}_2 berechnet werden:

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^\pi \frac{iR \cdot e^{it} dt}{1+R^2 \cdot e^{2it}}$$

Wir schätzen das Integral ab:

$$\left| \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \pi \cdot \sup_{0 \leq t \leq \pi} \left| \frac{R}{1+R^2 \cdot e^{2it}} \right| \leq \pi \cdot \sup_{0 \leq t \leq \pi} \left| \frac{1}{R \cdot e^{2it}} \right| \leq \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Damit bleibt nur noch das reelle Integral übrig, dessen Wert damit zu π bestimmt wurde.

Satz 29.12

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das die obere Halbebene einschließlich der reellen Achse enthält. Die Funktion f sei in G bis auf endlich viele Singularitäten a_1, \dots, a_m mit $\text{Im } a_i > 0$ holomorph. Weiterhin sei $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z \cdot f(z)| = 0$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m (\text{Res } f)(a_k)$$

Beweis

\mathcal{C} wird wie im obigen Beispiel konstruiert (mit denselben Parametrisierungen). Dabei sei R so groß, dass die isolierten Singularitäten innerhalb von \mathcal{C} liegen.

$$2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m (\text{Res } f)(a_k) = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^\pi f(R \cdot e^{it}) \cdot iR \cdot e^{it} dt$$

Zu zeigen ist nur noch, dass das rechte Integral für $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Dies ergibt sich aus dem geforderten Grenzprozess:

$$|f(R \cdot e^{it}) \cdot iR \cdot e^{it}| = |z \cdot f(z)| \rightarrow 0$$

Beispiel 29.8

Für eine gebrochenrationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{R}$ suchen wir die Integrale:

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \cos x \, dx \quad \text{und} \quad I_s = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \sin x \, dx$$

Dazu betrachten wir $\int_{\mathcal{C}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz$ und zeigen, dass die Integration über \mathcal{C}_2 nichts liefert, woraus folgt:

$$\int_{\mathcal{C}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot e^{ix} \, dx$$

Von diesem Integral müssen dann Real- und Imaginärteil betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \cos x \, dx &= \operatorname{Re} \left[2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Res} r(z) \cdot e^{iz}) (a_k) \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \sin x \, dx &= \operatorname{Im} \left[2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Res} r(z) \cdot e^{iz}) (a_k) \right] \end{aligned}$$

Um diese Argumentation zu rechtfertigen, müssen wir (wie oben bereits angedeutet) noch zeigen, dass das Integral über \mathcal{C}_2 verschwindet. Die Parametrisierung lautet:

$$z = R \cdot e^{it} = R \cdot (\cos t + i \cdot \sin t) \quad \Rightarrow \quad e^{iz} = e^{iR \cdot \cos t - R \cdot \sin t} \quad \Rightarrow \quad |e^{iz}| = e^{-R \cdot \sin t} = e^{-\operatorname{Im} z}$$

Um diesen Term zu behandeln, unterteilen wir \mathcal{C}_2 in drei Bereiche.

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} = \{z \in \mathcal{C}_2 : \operatorname{Im} z \geq h\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \{z \in \mathcal{C}_2 : \operatorname{Im} z < h\}$$

Man beachte, dass \mathcal{B} aus zwei disjunkten Teilen besteht. Im Folgenden sei der Grad von q größer als der von p , damit kann man $|r(z)| \leq K/|z|$ abschätzen. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{A}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| &\leq \frac{K \cdot e^{-h}}{r} \cdot \pi r = C_1 \cdot e^{-h} \\ \left| \int_{\mathcal{B}} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| &\leq \frac{K}{r} \cdot 4h = C_2 \cdot \frac{h}{R} \\ \Rightarrow \left| \int_{\mathcal{C}_2} r(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| &\leq C_1 \cdot e^{-h} + C_2 \cdot \frac{h}{R} \end{aligned}$$

Ob (*) gilt, kommt auf die geeignete Wahl von h an. Gültig ist zum Beispiel $h = \sqrt{R}$.

Weitere Beispiele

1. Wir betrachten das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

Die Konvergenz der Lösung ist in der Literatur (z.B. Fichtenholz II) aufgezeigt. Es wird die partielle Integration und die Konvergenz benutzt. Wir wollen das Integral jetzt mit den Mitteln

der komplexen Funktion ausrechnen. Man könnte zunächst den folgenden Ansatz probieren:

$$I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Das geht aber nicht, da der Integrand hier einen Pol bei $x = 0$ hat. Wir nehmen stattdessen den folgenden Integranden:

$$I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x} dx$$

Dieser Integrand ist in $x = 0$ holomorph. (Die Eins kann eingefügt werden, weil das x reell ist, somit geht die Eins nur in den Realteil des Integranden ein, der aber nicht betrachtet wird.) Wir berechnen von Hand das äquivalente Integral über die bekannte geschlossene Halbkreislinie:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \operatorname{Im} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz \\ \Rightarrow \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx &= \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{1-e^{iz}}{z} dz = \operatorname{Im} \left[\int_{\mathcal{C}_R} \frac{1}{z} dz - \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right] \end{aligned}$$

Das hintere Integral verschwindet für $R \rightarrow \infty$. Die Kurve \mathcal{C}_R können wir wie folgt parametrisieren:

$$z(t) = R \cdot e^{it} \quad \text{und} \quad dz = iR \cdot e^{it} \cdot dt \quad \text{mit} \quad 0 \leq t < \pi$$

Damit lässt sich das verbleibende Integral berechnen.

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{iR \cdot e^{it}}{R \cdot e^{it}} dt = \pi i \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Dieses Verfahren wollen wir verallgemeinern.

Lemma 29.13

Sei a ein einfacher Pol von f und $S_r^+(a) = \{z \in S_r(a) : \operatorname{Im} z \geq a\}$ der „obere“ Teil der Kreislinie $S_r(a)$ mit der Parametrisierung $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + r \cdot e^{it}$. Dann gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^+(a)} f(z) dz = \pi i \cdot (\operatorname{Res} f)(a)$$

Beweis

f hat in a einen einfachen Pol. In einer Umgebung von a gilt also:

$$f(z) = \frac{a-1}{z-a} + g(z)$$

Die hierdurch definierte Funktion g ist in a holomorph und deswegen auf der Integrationskurve beschränkt ($|g(z)| \leq M$). Das Integral über $S_r^+(a)$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{S_r^+(a)} g(z) dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} M \cdot \pi \cdot r$$

Das Integral über f lautet nun wie folgt:

$$\int_{S_r^+(a)} f(z) dz = \int_{S_r^+(a)} \frac{a-1}{z-a} dz = \int_0^\pi \frac{a-1}{r \cdot e^{it}} \cdot ir \cdot e^{it} dt = \pi i \cdot a_{-1} = \pi i \cdot (\text{Res } f)(a)$$

Wir betrachten nun eine neue Kurve \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = [-R, -r] \cup S_r^+(a) \cup [r, R] \cup \mathcal{C}_R$$

Das ist anschaulich die Randkurve der „oberen“ Hälfte eines Kreisringes. Wiederum nehmen wir den Integranden e^{iz}/z , für diesen wissen wir für $R \rightarrow \infty$ und $r \rightarrow 0$ bereits:

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Desweiteren können wir das im vorigen Beispiel gesuchte Integral durch den folgenden Grenzprozess ausdrücken:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im} \left(\int_{-\infty-r}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

Betrachten wir die Integration über \mathcal{C} , so sehen wir, dass die Summe dieser Integrale gleich der Differenz $\int_{\mathcal{C}} - \int_{\mathcal{C}_R} - \int_{S_r^+(a)}$ ist. Die ersten beiden Integrale verschwinden. Es verbleibt:

$$I = \text{Im} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r^+(a)} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \text{Im } i\pi = \pi$$

30 Ergänzungen zur Funktionentheorie

30.1 Analytische Fortsetzung

Definition 30.1

Seien G_1 und G_2 zwei nicht disjunkte Gebiete. In G_i sei die Funktion f_i holomorph und analytisch. Außerdem sind die Funktionen f_1 und f_2 auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich gleich:

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in G_1 \cap G_2$$

Dann ist die Funktion F mit

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1 \\ f_2(z) & z \in G_2 \end{cases}$$

auf $G := G_1 \cup G_2$ holomorph. F heißt **Fortsetzung** von f_1 in G .

Bemerkung

Falls eine Fortsetzung existiert, ist sie aufgrund des Identitätssatzes eindeutig bestimmt.

Wir wollen folgende Probleme genauer betrachten:

1. Sei f im Gebiet G analytisch. Kann man f in ein größeres Gebiet G' analytisch fortsetzen?
2. Falls ja, gibt es ein Verfahren, um die Fortsetzung zu konstruieren?

Ein solches Verfahren gibt es, für bestimmte G und f , tatsächlich. Ein wichtiges Gegenbeispiel ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, welche im Einheitskreis konvergiert und dort eine analytische Funktion darstellt, aber über keinen Randpunkt hinaus fortgesetzt werden kann. Den Hintergrund der Betrachtungen liegt in folgendem Satz.

Satz 30.2 Hadamardscher Lückensatz

Sei g eine analytische Funktion mit folgender Darstellung: (Es werden nur die Potenzen mit von Null verschiedenen Koeffizienten betrachtet.)

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^{n_k}$$

Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $n_{k+1} - n_k \geq \delta \cdot n_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann lässt sich f nicht über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzen.

Satz 30.3

Für alle Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ gibt es eine analytische Funktion f , die genau in G holomorph ist, die sich also nicht über G hinaus fortsetzen lässt.

Den Beweis hierzu findet man in der Literatur (Behnke/Sommer III, 8.27). Jetzt suchen wir ein Verfahren zur Bestimmung der Fortsetzung und stellen fest, dass es sogar mehrere gibt.

Satz 30.4 Kleiner Schwarzscher Spiegelungssatz

Sei G ein Gebiet in der „oberen“ Halbebene $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, zu dessen Rand ∂G ein endliches Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gehört. Das Integral (a, b) möge ein sogenannter **freier Randbogen** sein:

$$\forall x \in (a, b) \exists r > 0 : K_r(x) \cap H^+ \subset G$$

Die Funktion f sei holomorph in G , auf $G \cup (a, b)$ stetig und auf (a, b) reell. G^- sei das durch Spiegelung von G an der reellen Achse entstehende Gebiet. Dann existiert eine analytische Fortsetzung F von f auf $G \cup G^- \cup (a, b)$.

Beweis Beweisidee

Man definiert die Fortsetzung wie folgt:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in G \cup (a, b) \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in G^- \end{cases}$$

Der Beweis der Analytizität von F ist sehr aufwändig. ■

Ein weiteres Fortsetzungsverfahren ist das sogenannte **Kreiskettenverfahren**. Hierfür sei f_1 durch eine Potenzreihe gegeben:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - a)^n \quad \text{für } z \in K_r(a)$$

Sei $b \in K_r(a)$. Wir entwickeln f_1 um b :

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z - b)^n$$

Der Konvergenzkreis $K_s(b)$ von f_2 kann komplett in $K_r(a)$ liegen (und mit seinem Rand die Peripherie von $K_r(a)$ berühren). Es kann aber auch sein, dass der neue Konvergenzkreis über den ursprünglichen hinausragt. In $K_r(a) \cap K_s(b)$ gilt natürlich $f_1 \equiv f_2$. Dann kann man eine neue (wiederum analytische) Funktion f in dem Gebiet $K_r(a) \cup K_s(b)$ definieren:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in K_r(a) \\ f_2(z) & z \in K_s(b) \end{cases}$$

Diese Art der Fortsetzung geschieht also durch Umordnung von Potenzreihen. Das Verfahren kann natürlich mehrfach angewendet werden, aber wie kann man diese Idee „richtig“ formulieren?

Definition 30.5

Sei mit $P(z|c)$ eine Potenzreihe um c bezeichnet.

1. Zwei Potenzreihen $P(z|a)$ und $P(z|b)$ heißen **benachbart**, wenn ihre Konvergenzkreise einen nichtleeren Durchschnitt haben, auf welchem $P(z|a) = P(z|b)$ gilt.
2. Eine endliche Folge $(P(z|a_i))_{1 \leq i \leq n}$ von Potenzreihen heißt **Potenzreihenkettenkette**, wenn $P(z|a_i)$ und $P(z|a_{i+1})$ für $i = 1, \dots, n-1$ jeweils benachbart sind.
3. Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg in \mathbb{C} . Eine Potenzreihenkettenkette $(P(z|a_i))_{1 \leq i \leq n}$ heißt **Potenzreihenkettenkette längs γ** , wenn $a_1 = \gamma(\alpha)$ sowie $a_n = \gamma(\beta)$ gilt und wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{I_1, \dots, I_n\}$ von $[\alpha, \beta]$ in abgeschlossene Teilintervalle I_k gibt, sodass $\gamma(I_k) \subset K_{r_k}(a_k)$ liegt. (Der Weg γ liegt also abschnittsweise in den Konvergenzkreisen der $P(z|a_k)$.)

Häufig liegen die Mittelpunkte a_k der Konvergenzkreise auf $\mathcal{C} = \gamma([\alpha, \beta])$. (Die Entwicklungspunkte werden also von der Kurve erzeugt.) Im Folgenden wird beschrieben, inwieweit Fortsetzungen längs einer Kurve γ mittels Potenzreihenketten von den Ketten und von γ unabhängig sind.

Satz 30.6

Seien $(P(z|a_i))_{1 \leq i \leq n}$ und $(Q(z|a_j))_{1 \leq j \leq m}$ zwei Potenzreihenketten längs eines Weges γ . Wenn $P(z|a_1) = Q(z|b_1)$ ist, dann gilt auch $P(z|a_n) = Q(z|b_m)$ (jeweils auf dem gemeinsamen Konvergenzgebiet).

Beweis

Beweisidee

Man beachte $\gamma(\alpha) = a_1 = b_1$ und $\gamma(\beta) = a_n = b_m$. Jetzt seien $\{I_1, \dots, I_n\}$ und $\{J_1, \dots, J_m\}$ die in der Definition beschriebenen Zerlegungen des Intervalls $[\alpha, \beta]$. Der Hauptbestandteil des Beweises besteht darin, die folgende Aussage zu zeigen:

(*) Wenn $I_k \cap J_l \neq \emptyset$, dann sind $P(z|a_k)$ und $Q(z|b_l)$ benachbart.

Angenommen, (*) gilt nicht für ein Paar (k, l) (wobei $k + l$ möglichst klein ist). Für die Lage von I_k und J_l gibt es die zwei Möglichkeiten. Wir betrachten den Fall, dass J_l von I_k und I_{k-1} überdeckt wird. Es ist also $I_{k-1} \cap I_k \cap J_l \neq \emptyset$. (Beachte: Zwei aufeinanderfolgende I_k enthalten den gemeinsamen Randpunkt.) Diese Relation lässt sich auf die Konvergenzkreise übertragen:

$$A := K_{r_{k-1}}(a_{k-1}) \cap K_{r_k}(a_k) \cap K_{s_l}(b_l) \neq \emptyset$$

Da $J_l \cap I_{k-1} \neq \emptyset$ und $k + l$ minimal war, müssen $P(z|a_{k-1})$ und $Q(z|b_k)$ benachbart sein. Die Potenzreihen $P(z|a_{k-1})$ und $P(z|a_k)$ sind sowieso benachbart. Damit gilt in der offenen Menge A :

$$P(z|a_{k-1}) = Q(z|b_k) = P(z|a_l) \quad \forall z \in A$$

In der offenen Menge A können wir eine hinreichend große Menge (zum Beispiel eine Kreisscheibe) finden, um den Identitätssatz anwenden zu können. Insbesondere ist also $P(z|a_k) = Q(z|b_l)$ für alle $z \in K_{r_k}(a_k) \cap K_{s_l}(b_l)$. Somit sind $P(z|a_k)$ und $Q(z|b_l)$ benachbart, dies ist also ein Widerspruch zur Annahme. Damit ist (*) gezeigt.

Auf alle Fälle ist $I_n \cap J_m \neq \emptyset$, also sind $P(z|a_n)$ und $Q(z|b_m)$ benachbart. Da aber $a_n = b_m$ ist, muss $P(z|a_n) = Q(z|b_m)$ sein. ■

Definition 30.7

Seien $G_1 \subsetneq G \subset \mathbb{C}$ zwei Gebiete. Die Funktion f_1 sei in G_1 holomorph. f_1 heißt in G **unbeschränkt fortsetzbar**, wenn längs jedes Weges γ , der in G_1 beginnt und ganz in G verläuft, eine Potenzreihenkette existiert, deren erstes Glied die Potenzreihenentwicklung von f_1 im Anfangspunkt von γ ist. Das letzte Glied der Kette heißt **Fortsetzung** von f_1 längs γ . Die Fortsetzung ist von der gewählten Potenzreihenkette unabhängig.

Welches Problem taucht auf, wenn man die Unabhängigkeit von γ diskutieren will? Betrachte zum Beispiel den Logarithmus. Wähle zwei Wege γ_0 und γ_1 vom Punkt a zum Punkt b so, dass der Nullpunkt in dem von γ_0 und γ_1 umrandeten Gebiet liegt. Das Problem ist, dass man den einen Weg nicht stetig in den anderen deformieren kann und dabei im Definitionsbereich des Logarithmus bleiben kann. (Beachte $0 \notin D(\log)$.) Der entsprechende Begriff ist die sogenannte **Homotopie** von Wegen.

Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Sie heißen **homotop**, wenn sie – anschaulich gesprochen – stetig ineinander deformiert werden können. Das heißt, es existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit:

1. $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$ ist für alle $s \in [0, 1]$ ein stetiger Weg.
2. γ überführt γ_0 und γ_1 ineinander: $\gamma(0, \cdot) = \gamma_0$ und $\gamma(1, \cdot) = \gamma_1$
3. Alle Kurven γ_s haben dieselben Endpunkte: $\gamma_s(0) = a$ und $\gamma_s(1) = b$

Entsprechend heißen γ_0 und γ_1 homotop in G , wenn für alle s gilt: $\gamma_s[0, 1] \subset G$.

Ein **entarteter Weg** ist $\gamma_{p_0} : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma_{p_0}(t) = p_0$ für alle t . (Die Kurve zu einem entarteten Weg ist also ein einzelner Punkt.) Sei nun γ ein geschlossener Weg in G , der bei p_0 beginnt und endet. γ heißt auf p_0 **zusammenziehbar**, wenn γ und γ_{p_0} homotop sind.

Nun ist der einfache Zusammenhang sauber definierbar: Ein Gebiet G heißt **einfach zusammenhängend**, wenn es in G ein p_0 gibt, so dass alle geschlossenen Kurven in G , die in p_0 beginnen und enden, auf p_0 zusammenziehbar sind. (Man kann zeigen, dass die Definition von p_0 unabhängig ist.)

Satz 30.8 Monodromiesatz

Sei f_1 in G_1 holomorph und in $G \supsetneq G_1$ unbeschränkt fortsetzbar. Seien γ_0 und γ_1 zwei homotope Wege, die a in G_1 und b in G verbinden. Dann sind die Fortsetzungen von f_1 längs γ_0 und γ_1 gleich.

Satz 30.9

Die Funktion f_1 sei im Gebiet G_1 holomorph und in das Gebiet $G \supsetneq G_1$ unbeschränkt fortsetzbar. Ist G einfach zusammenhängend, dann existiert eine analytische Fortsetzung f von f_1 in G .

30.2 Konforme Abbildungen

Wann kann man zwei Gebiete G_0 und G_1 aus \mathbb{C}_0 eineindeutig und konform aufeinander abbilden? Die Antwort folgt später. Zunächst sehen wir, dass man bereits mit einfachen Abbildungen viel bewerkstelligen kann. Wir betrachten die wichtige Klasse der gebrochen linearen Abbildungen (**Möbiustransformationen**):

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0$$

Die Umkehrabbildung ist dann:

$$M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Die Funktion hat unendliche Funktionswerte:

$$M(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot z + d = 0 \quad \text{und außerdem} \quad M(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ 0 & c = 0 \end{cases}$$

Weiterhin hat M die folgenden Eigenschaften:

1. M bildet \mathbb{C}_0 eineindeutig und konform auf sich ab.
2. Die Möbiustransformationen M bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

$$M_1 \circ M_2 = M \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3. Möbiustransformationen erhalten das Doppelverhältnis von Punkten. Seien u_1 bis u_4 vier voneinander verschiedene Punkte. Das Doppelverhältnis ist dann gegeben durch:

$$DV(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_4} \cdot \frac{u_2 - u_4}{u_2 - u_3}$$

Wenn man etwa $u_4 = \infty$ wählt, dann setzt man:

$$DV(u_1, u_2, u_3, u_4) = \lim_{z \rightarrow 0} DV\left(u_1, u_2, u_3, \frac{1}{z}\right) = \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3}$$

4. Seien z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 zwei Tripel von paarweise verschiedenen Punkten, dann existiert genau ein M mit:

$$M(z_i) = w_i \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq 3$$

Um dies zu beweisen, betrachte M_1 und M_2 wie folgt:

$$M_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{und} \quad M_2(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

Dann gilt $M_1(z_1) = 0$, $M_1(z_2) = 1$ und $M_1(z_3) = \infty$ (für M_2 analog mit den w_i). Die gesuchte Abbildung erhält man dann als $M = M_2^{-1} \circ M_1$.

5. M bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. (Verallgemeinerte Kreise sind Kreise in \mathbb{C}_0 , also Kreise oder Geraden in \mathbb{C} .)

Satz 30.10 Riemannscher Abbildungssatz

Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in G$. Dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung φ von G auf den offenen Einheitskreis $K_1(0)$ mit $\varphi(z_0) = 0$.

Folgerung 30.11

Seien $G_0, G_1 \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete mit $z_0 \in G_0$ und $z_1 \in G_1$. Dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung φ von G_0 auf G_1 mit $\varphi(z_0) = z_1$.

Bemerkung

Man kann auch noch die Zuordnung der Ränder genauer beschreiben.

Wozu nützt dieser Satz? Wir betrachten ein Problem in einer Ebene (zum Beispiel eine Randwertaufgabe erster Ordnung für ein einfach zusammenhängendes Gebiet G). Die Idee ist, das Problem im Einheitskreis zu lösen, denn man kann G auf den Einheitskreis abbilden und die Lösung am Ende zurücktransformieren.

30.2.1 Zum Primzahlsatz

Sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen zwischen 0 und x . Wie kann man diese Zahl abschätzen?

Satz 30.12 Primzahlsatz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1$$

Es ist doch erstaunlich, dass man diesen Satz mit den Mitteln der Funktionentheorie beweisen kann. (Den Beweis finden Sie in der Literatur.)