Analysis für Physiker – Zusätze

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Werner Timmermann
(Sommersemester 2007, Wintersemester 2007/08)

Herausgegeben von

AGeS Die Skript-Spezialisten

Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Bemerkungen zur Tensorrechnung

Oft wird ein Tensor definiert als ein System von Zahlen $T^{ij\dots}_{kl\dots}$ mit $1 \leq i, j, k, l, \dots \leq n$, das sich bei Koordinatentransformationen wie folgt transformiert: ... – Wir wählen eine äquivalente Definition.

1.1 Definitionen

Ab jetzt ist es wichtig, ob Indizes oben oder unten steht. Im folgenden sind alle Vektorräume endlichdimensional und reell. In diesen Vektorräumen gibt es zunächst keine zusätzliche Struktur, insbesondere kein Skalarprodukt. V sei ein Vektorraum der Dimension n. $(e_1, \dots, e_n)$ sei eine beliebige Basis von V. Für einen Vektor $x \in V$ sind x^i die Koordinaten von x bzgl. der Basis (e_k):

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \text{ mit } x^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

Bemerkung Einstein'sche Summenkonvention

Über doppelt (jeweils einmal oben und unten) auftretende Indizes wird automatisch summiert, zum Beispiel:

$$x^i e_i \equiv \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \text{ oder } A^{ij}_k B^k_{il} \equiv \sum_{k,i=1}^{n} A^{ij}_k B^k_{il}$$

Definition 1.1 Dualer Vektorraum

Der duale Vektorraum V^* ist der Vektorraum der linearen Funktionale auf V, also $V^* = L(V, \mathbb{R})$.

Definition und Satz 1.2 Duale Basis

Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine beliebige Basis von V. Dann existiert eine Basis $(e^1, \dots, e^n)$ von V^* (die zu $(e_1, \dots, e_n)$ duale Basis) mit folgender Eigenschaft:

$$e_i(e^j) = \delta^i_j \text{ (Kronecker-Symbol)}$$

Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$.

Beweis
Beachte im Folgenden stets: Eine lineare Abbildung ist bereits dadurch eindeutig definiert, dass man ihre Wirkung auf die Basisvektoren kennt! Also definiere $e^i(e_j) := \delta^i_j$. Daraus folgt:

$$e^i(x) = e^i(x^j e_j) = x^j (e^i(e_j)) = x^j \delta^i_j = x^i$$

Zu zeigen ist noch, dass $(e^1, \dots, e^n)$ linear unabhängig ist (das ist eine Übungsaufgabe) und dass die $(e^1, \dots, e^n)$ den Vektorraum V^* aufspannen. Sei $f \in V^*$, d.h. $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i)$. Setze $c_i := f(e_i)$; anscheinend ist $f = c_i e^i$. Das wollen wir zeigen. Sei $g := c_i e^i$.

$$g(x) = c_i e^i(x^j e_j) = c_i x^j e^i(e_j) = c_i x^j \delta^i_j = c_i x^i = f(x)$$

■

Satz 1.3

Der zu V^* duale Vektorraum wird mit $V^{**} := (V^*)^*$ bezeichnet. Die Dimension von V^{**} ist wiederum n. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus $j : V \to V^{**}$, der durch die Wirkung von $j(x) \in V^{**}$ auf die Elemente $f \in V^*$ definiert wird:

$$[j(x)](f) := f(x) \; \forall f \in V^*$$

$[j(x)](f)$ ist linear in f und auch in x. Außerdem ist j bijektiv.

Beweis

Für die Bijektivität von V genügt es, zu zeigen, dass j injektiv ist; daraus folgt die Surjektivität unmittelbar. Angenommen, $j(x) = 0$. Zu zeigen ist $x = 0$, d.h.

$$[j(x)](f) = 0 \; \forall f, \text{ also } f(x) = 0 \; \forall f \Rightarrow x = 0$$

Im Allgemeinen wende $e^1, \dots, e^n$ auf x an. Das genügt, um $x = 0$ zu sehen.

■

Bemerkung

> Im Folgenden identifizieren wir immer stillschweigend x und $j(x)$, d.h. wir betrachten $x(f)$ als $[j(x)](f) = f(x)$.

Definition 1.4

Seien $E_1, \dots, E_k$ Vektorräume. Eine Abbildung $\alpha : E_1 \times \dots \times E_k \to \mathbb{R}$ heißt <u>multilinear</u> (bzw.<u>Multilinearform</u>), wenn α in jeder Komponente linear ist:

$$\forall i = 1, \dots, k : \alpha(u_1, \dots, u_i + \lambda v_i, \dots, u_k) = \alpha(u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) + \lambda\alpha(u_1, \dots, v_i, \dots, u_k)$$

Beispiel 1.1

$E_1 = E_2 = E$ sei ein Vektorraum. Ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}, (u, v) \to \langle u, v\rangle$ ist bilinear.

Definition 1.5 Tensor

Sei V ein Vektorraum und $r, s \in \mathbb{N}$.

1. Ein r-fach kovarianter Tensor auf (über) V ist eine multilineare Abbildung
$$\alpha : V^r := \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{r-mal}} \to \mathbb{R}$$
2. Ein s-fach kontravarianter Tensor auf V ist eine multilineare Abbildung
$$\alpha : (V^*)^s := \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{\text{s-mal}} \to \mathbb{R}$$
3. Für $r, s \geq 0$ ist ein r-fach kovarianter und s-fach kontravarianter Tensor auf V eine multilineare Abbildung
$$\alpha : V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{R}$$

Bezeichnungen

Im folgenden sei $\otimes$ das Tensorprodukt.

- $T_r(V) \equiv T_r^0(V) = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} = \bigotimes_{i=1}^{r} V^*$ ist die Menge aller r-fach kovarianten Tensoren über V.
- $T^s(V) \equiv T_0^s(V) = \bigotimes_{k=1}^{s} V$ ist die Menge aller s-fach kontravarianten Tensoren über V.
- $T_r^s(V) = \left(\bigotimes_{i=1}^{r} V^*\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{s} V\right)$ ist die Menge aller r-fach kovarianten und s-fach kontravarianten Tensoren über V.

Dass diese Mengen Vektorräume sind, zeigt man leicht. Im Folgenden sind zu bestimmen:

- Basen und Dimensionen dieser Räume
- das Verhalten dieser Räume bei Koordinatentransformation
- Rechenoperationen mit Tensoren

1.2 Rechenoperationen mit Tensoren

Mit Tensoren können viele Rechenoperationen ausgeübt werden, zum Beispiel können gleichartige Tensoren linear kombiniert werden. Besonders wichtig ist das Tensorprodukt oder dyadische Produkt:

Seien $\alpha \in T_r^s(V)$ und $\beta \in T_{r'}^{s'}(V)$. Dann ist $\alpha \otimes \beta \in T_{r+r'}^{s+s'}(V)$ und es gilt

$$\begin{aligned} & (\alpha \otimes \beta)\left(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+r'}, w^1, \ldots, w^s, w^{s+1}, \ldots, w^{s+s'}\right) \\ = \; & \alpha\left(v_1, \ldots, v_r, w^1, \ldots, w^s\right) \cdot \beta\left(v_{r+1}, \ldots, v_{r+r'}, w^{s+1}, \ldots, w^{s+s'}\right) \end{aligned}$$

Entsprechen wird $\alpha \otimes \beta \otimes \ldots \otimes \gamma$ erklärt.

Beispiel 1.2

1. $T_0^1(V) = V$ - Wirke $\alpha \in V$ (bzw. $v \in V$) auf $f \in V^*$, dann ist $\alpha(f) \equiv v(f)$. Analog ist $T_1^0(V) = V^*$.
2. Seien $f, g \in V^*$ $[= T_1(V)]$. Dann ist $f \otimes g \in T_2(V)$, also wirkt $f \otimes g$ auf jeweils zwei Vektoren und es ist

$$(f \otimes g)(v_1, v_2) = f(v_1) \cdot g(v_2) \quad [v_{1,2} \in V]$$

Seien $v, w \in V$ $\left[= T^1(V)\right]$. Dann ist $v \otimes w \in T^2(V)$ und es ist

$$(v \otimes w)(f_1, f_2) = f_1(v) \cdot f_2(w) \quad [f_{1,2} \in V^*]$$

Die Tensoren der Familie $\alpha \otimes \beta$ bzw. $\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_m$ heißen elementare Tensoren. (Wir sehen später, dass zum Beispiel die elementaren Tensoren $f \otimes v$ mit $f \in V^*$ und $v \in V$ $\left[f \otimes v \in T_1^1(V)\right]$ den Raum $T_1^1(V) = V^* \otimes V$ aufspannen. Dazu braucht man Linearkombinationen!)

Beispiel 1.2 (Fortsetzung)

3. Betrachte ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in V. Das ist ein zweifach kovarianter Tensor, denn er bildet von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$ ab. Das Skalarprodukt ist in den Variablen symmetrisch, also ein symmetrischer Tensor.
4. Sei V ein Vektorraum mit einer festen Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ und den Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$. Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Koordinatenvektoren von $v_1, \ldots, v_n$ bzgl. dieser Basis. Nun ordnen wir den Vektoren die Determinante einer Matrix aus ihren Spaltenvektoren zu:

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \left| \begin{pmatrix} z_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} z_n \end{pmatrix} \right|$$

Dadurch ist ein n-fach kovarianter Tensor definiert. Dieser Tensor ist alternierend, d.h. aus den Vertauschen zweier Argumente folgt ein Vorzeichenwechsel.

1.3 Basis und Koordinatendarstellung

Satz 1.6

Sei (e_i) eine Basis für V und (e^k) die duale Basis in V^* (d.h. $e^k(e_i) = \delta_k^i$). Dann ist

$$\left\{e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s} : i_k \in \{1, \ldots, k\}, j_l \in \{1, \ldots, n\}\right\} \qquad (*)$$

eine Basis von $T_r^s(V)$.

Beispiel 1.3

Sei $\dim V = 2$. Wir suchen eine Basis für $T^3(V)$ und finden acht Elemente:

$$e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \quad , \quad e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \quad , \ldots , \quad e_2 \otimes e_2 \otimes e_2$$

Beweis

Zu zeigen: $(*)$ ist linear unabhängig und erzeugt $T_r^s(V)$. Aus Platzgründen sei $s = 0$ (und r beliebig), also

$$(*) = \left\{e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} : 1 \leq i_k \leq n\right\}$$

Beachte, dass für die Anwendung eines Elementes dieser Menge auf die Basisvektoren von V gilt:

$$\left(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r}\right)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = e^{i_1}(e_{j_1}) \cdot \ldots \cdot e^{i_r}(e_{j_r}) = \delta_{j_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{j_r}^{i_r}$$

Angenommen, es ist $\sum c_{i_1,\dots,i_r} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} = 0$. Wende dies auch beliebige $(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ an:

$$\sum c_{i_1,\dots,i_r} \cdot \delta^{i_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_r}_{j_r} = 0 \Rightarrow c_{j_1,\dots,j_r} = 0$$

Da dies für alle Basisvektoren (e_j) gilt, ist $(*)$ wirklich linear unabhängig. Noch zu zeigen: $(*)$ ist ein Erzeugendensystem von $T_r(V)$. Sei $\alpha \in T_r(V)$ beliebig. Zu zeigen:

$$\alpha = \sum a_{i_1,\dots,i_r} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} \qquad (**)$$

Behauptung: Setze $a_{k_1,\dots,k_r} := \alpha\left(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}\right)$. Diese $a_{\dots}$ erzeugen gemäß $(**)$ den Vektor α, d.h. für beliebige $u_1, \dots, u_r \in V$ ist

$$\alpha\left(u_1, \dots, u_r\right) = \left(\sum a_{i_1,\dots,i_r} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r}\right)\left(u_1, \dots, u_r\right))$$

Der Beweis dieser Aussage bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, da er sehr lehrreich, wenn auch etwas umständlich ist. Hier zeigen wir eine vereinfachte Variante: Zwei Abbildungen $\alpha, \beta \in T_r(V)$ (analog für $T^s_r(V)$) sind schon gleich, wenn sie auf den Basisvektoren gleich sind:

$$\alpha\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}\right) = \beta\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}\right) \ \forall 1 \leq i_k \leq n$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum a_{i_1,\dots,i_r} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r}\right)\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}\right) &= \sum a_{i_1,\dots,i_r} \delta^{i_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \delta^{i_r}_{j_r} \\
&= a_{j_1,\dots,j_r} \\
&= \alpha\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}\right) \quad \text{(siehe oben)}
\end{aligned}$$

■

Bemerkung

Die Darstellung $\alpha = \sum a_{i_1,\dots,i_r} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r}$ sieht für $r = 2$ anschaulich so aus:

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e^i \otimes e^j$$

Allerdings lässt sich diese Formulierung nicht anschaulich auf $r > 2$ übertragen.

Definition 1.7 Koordinaten eines Tensors

Sei $\alpha \in T^s_r(V)$. Dann heißt das System von Zahlen

$$a^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} := \alpha\left(e^{j_1}, \dots, e^{j_s}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right) \quad (1 \leq j_k, i_l \leq n)$$

Koordinaten von α bzgl. der Basis $(e_1, \dots, e_n)$, d.h. bezüglich $(*)$.

1.4 Koordinatentransformation von Tensoren

Betrachte in V Basen $(e_1, \dots, e_n)$ und $(e'_1, \dots, e'_n)$ mit den dualen Basen $\left(e^1, \dots, e^n\right)$ und $\left(e'^1, \dots, e'^n\right)$ in V^*. Sei $x \in V$ und $f \in V^*$, dann ist

$$\begin{array}{rlll}
 & x = x^i e_i = x'^j e_j & f = f_i e^i = f'_j e'^j & \\
\Rightarrow & e_j = a^i_j e'_i & e'_j = a'^i_j e_i & (1) \\
\text{und} & e^j = b^j_i e'^i & e'^j = b'^j_i e^i & (2)
\end{array}$$

$\left(a^i_j\right)$ kann als Matrix interpretiert werden: oderer Index = Zeilenindex, unterer Index = Spaltenindex

$$(e_i) = \left(e'_1, \ldots, e'_n\right)\left(a_{ij}\right) \quad , \quad \left(e^j\right) = \left(b_{ij}\right)\begin{pmatrix} e'^1 \\ \ldots \\ e'^n \end{pmatrix}$$

Behauptung: Die Matrizen (a^i_j) und (a'^i_j) sowie (b^i_j) und (b'^i_j) sind jeweils invers zueinander (hier ohne Beweis). Die Transformation der Koordinaten eines Tensors erfolgt dann so:

$$\begin{aligned} x'^j &= a^j_i x^i \qquad & x^j &= a'^j_i x'^i \qquad & (3) \\ f_j &= b'^i_j f'_i \qquad & f'_j &= b^i_j f_i \qquad & (4) \end{aligned}$$

Man zeigt, dass in unserem Falle der Wahl der Basen in V^* als duale Basen folgendes gilt:

$$\left(b^i_j\right) = \left(a'^i_j\right) \qquad \left(b'^i_j\right) = \left(a^i_j\right)$$

Aus (3) folgt die wichtige „Merkregel“:

$$a^j_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \quad , \quad a'^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \quad , \quad \boxed{x'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i \quad , \quad x^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} x'^i}$$

2 Maxwellsche Gleichungen und Differentialformen

Der **Minkowski-Raum** M ist der $\mathbb{R}^4$ mit Elementen der Form $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, und darin eine Bilinearform g, das sogenannte **Minkowski-Skalarprodukt** (das aber kein richtiges Skalarprodukt ist) mit $g(x, y) = x^0 \cdot y^0 - x^1 \cdot y^1 - x^2 \cdot y^2 - x^3 \cdot y^3$.

Sei V ein (reeller) n-dimensionaler Vektorraum und g eine Bilinearform auf V mit den Eigenschaften:

- g ist symmetrisch – $g(x, y) = g(y, x)$
- g ist nicht entartet – Es gilt eine der folgenden äquivalenten Bedingungen:
  - Wenn $g(x, y) = 0$ für festes x und alle $y \in V$, dann soll $x = 0$ folgen.
  - Für eine (und damit jede) Basis (v_i) in V ist die Matrix $(g(v_i, v_j))$ invertierbar und zudem symmetrisch.

Dann ist diese Matrix diagonalisierbar, es existiert also eine Basis (u_i) von V, für die $(g(u_i, u_j))$ Diagonalgestalt hat. Bei geeigneter Wahl der (u_i) hat $(g(u_i, u_j)) =: (g_{ij})$ die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das sogenannte **Sylvestersche Trägheitsgesetz** besagt: Die jeweilige Anzahl der Plus- und Minuszeichen ist unabhängig von der Basis.

Im Minkowski-Raum liefert die Standard-Basis (e_0, e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^4$ gerade

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Man nennt eine Basis (w_i) von V **orthonormal** bezüglich g, wenn $|g(w_i, w_j)| = \delta_{ij}$ ist.

2.1 Grundlagen der Differentialformen

Die Räume der Differentialformen aus $\mathbb{R}^4$ wurden mit $\Omega^s(\mathbb{R}^4)$ bezeichnet, wobei $s = 1, \ldots, 4$ ist. In $\Omega^0(\mathbb{R}^4)$ sind die beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ enthalten. Die Elemente von $\Omega^s(\mathbb{R}^4)$

haben in der Standarddarstellung die Struktur:

$$\omega = \sum_{j_1<\dots<j_s} \omega_{j_1\cdots j_s} \cdot \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}$$

Die Ableitung ist gegeben durch

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j_1<\dots<j_s} \mathrm{d}\omega_{j_1\cdots j_s} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \in \Omega^{s+1}(\mathbb{R}^4)$$

als Zurückführung auf Ableitungen in Räumen $\Omega^s(\mathbb{R}^4)$ mit kleinerem s. Für $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^4)$ gilt

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k$$

Außer (g_{ij}) wird auch die inverse Matrix betrachtet, die die Form (g^{ij}) hat. In unserem Fall ist $g_{ij} = g^{ij}$. Jetzt wird dieses g benutzt, um in den Ω^s eine Bilinearform zu definieren.

$$\begin{array}{rcl} \omega & = & \sum\limits_{j_1<\dots<j_s} \omega_{j_1\cdots j_s} \cdot \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\ \sigma & = & \sum\limits_{i_1<\dots<i_s} \sigma_{i_1\cdots i_s} \cdot \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_s} \\ g(\omega,\sigma) & := & \sum\limits_{\substack{j_1<\dots<j_s \\ i_1<\dots<i_s}} g^{j_1 i_1} \cdots g^{j_s i_s} \cdot \omega_{j_1\cdots j_s} \cdot \sigma_{i_1\cdots i_s} \end{array}$$

g auf Ω^s ist wieder symmetrisch. In obiger Summe sind nur solche Summanden ungleich Null, in denen $(j_1,\ldots,j_s) = (i_1,\ldots,i_s)$ ist, weil $g^{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. Man sieht jetzt sofort, dass die

$$e^{j_1\cdots j_s} := \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \quad \text{mit} \quad j_1 < \cdots < j_s$$

eine Orthonormalbasis bezüglich der Bilinearform g bilden. Mittels g wird der sogenannte **Stern-Operator** definiert:

$$* : \Omega^s(\mathbb{R}^4) \to \Omega^{4-s}(\mathbb{R}^4), \sigma \mapsto *\sigma \quad \text{mit} \quad \omega \wedge *\sigma = g(\omega,\sigma) \cdot \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^3 =: g(\omega,\sigma) \cdot \mu \quad \forall \omega \in \Omega^s(\mathbb{R}^4)$$

$\mu = \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^3$ ist eine 4-Form. Wegen $\omega \in \Omega^s$ und $*\sigma \in \Omega^{4-s}$ ist $\omega \wedge *\sigma \in \Omega^4$. Ω^4 besteht nur aus Elementen der Form $f \cdot \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^3$. f ist aus $C^\infty(\mathbb{R}^4)$, und natürlich ist $g(\omega,\sigma)$ auch aus $C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Der Operator $*$ hat unter anderem folgende Eigenschaften:

- $*(h \cdot \sigma) = h \cdot *\sigma$ für $h \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, denn $g(\omega, h\cdot\sigma) = g(h\cdot\omega,\sigma) = h \cdot g(\omega,\sigma)$.
- $*$ ist eindeutig definiert, wenn man weiß, wie $*$ auf die Basiselemente wirkt, denn

$$\sigma = \sum_{i_1<\dots<i_s} \sigma_{i_1\cdots i_s} \cdot \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_s} \quad \Rightarrow \quad *\sigma = \sum_{i_1<\dots<i_s} \sigma_{i_1\cdots i_s} \cdot *(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_s})$$

Betrachte: $e^{i_1,\ldots,i_nk} = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$. Dann ist

$$*e^{i_1,\ldots,i_nk} = \pm e^{j_1\cdots j_{4-k}},$$

wobei $j_1 < \ldots < j_{4-k}$ ist und die $j_1,\ldots,j_n4-k \in \{0,1,2,3\} \setminus \{i_1,\ldots,i_nk\}$ sind. Also ist zum Beispiel $*e^{01} = \pm e^{23}$ und $*e^{013} = \pm e^2$.

- Für $k = 0$: 1 ist Basis in Ω^0 und $g(1,1) = 1 \cdot 1 = 1$. Es ist $*1 = \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^3$.

- Für $k=1$: Es ist $g(e^0,e^0)=1$ sowie $g(e^i,e^i)=g(\mathrm{d}x^i,\mathrm{d}x^i)=g^{ii}\cdot 1\cdot 1=-1$ für $i\geq 1$. Es folgt:

$$\begin{array}{rclcrcl} e^0\wedge e^{123} & = & \mu & \Rightarrow & *e^0 & = & e^{123} \\ e^1\wedge e^{023} & = & -\mu & \Rightarrow & *e^1 & = & e^{023} \end{array}$$

- Für $k=2$: Es ist $g(e^{0i},e^{0i})=1$ und $g(e^{ij},e^{ij})=1$ für $i,j\in\{1,2,3\}$ und $i<j$. Also ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} *e^{01} & = & -e^{23} \\ *e^{02} & = & e^{13} \\ *e^{03} & = & -e^{12} \\ *e^{12} & = & e^{03} \\ *e^{13} & = & -e^{02} \\ *e^{23} & = & e^{01} \end{array}$$

Das **Kodifferential** $\delta:\Omega^s\to\Omega^{s-1}$ wird definiert durch

$$\delta := *\mathrm{d}* : \Omega^s \xrightarrow{*} \Omega^{4-s} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{5-s} \xrightarrow{*} \Omega^{s-1}$$

2.2 Maxwellsche Gleichungen im Minkowski-Raum

Führe in den Maxwell'schen Gleichungen (in der Vorlesung in vereinfachter Form in den Formeln (18.5) und (18.6) dargestellt; relevant sind auch (18.7) bis (18.10)) Vierervektoren ein:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{J}=(j^0,j^1,j^2,j^3) & \text{mit} & j^0 := \varrho \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}=(A_0,A_1,A_2,A_3) & \text{mit} & A_0 := -V \end{array}$$

(18.10) wird jetzt

$$\operatorname{div}\mathbf{J}=0$$

Aus dem Ansatz (18.7) wird jetzt einheitlich folgendes (mit Kurzschreibweise $\partial_j=\partial/\partial x^j$):

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & -(\partial_0 A_1-\partial_1 A_0) \\ E_2 & = & -(\partial_0 A_2-\partial_2 A_0) \\ E_3 & = & -(\partial_0 A_3-\partial_3 A_0) \\ H_1 & = & -(\partial_2 A_3-\partial_3 A_2) \\ H_2 & = & -(\partial_3 A_1-\partial_1 A_3) \\ H_3 & = & -(\partial_1 A_2-\partial_2 A_1) \end{array}$$

Definiere nun den sogenannten **Faraday-Tensor**:

$$\begin{array}{rcl} F & = & \sum\limits_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \\ F & = & \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Damit kann man zeigen, dass (18.6a) äquivalent sind zu

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0 \qquad (*)$$

für paarweise verschiedene μ, ν und λ zwischen 0 und 3. Zum Beispiel für $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F12 = \partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 + \partial_3 H_3 = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Bilde die 1-Form $\omega_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \sum_{i=0}^{3} A_i \mathrm{d}x^i$. Aus Definition von F folgt: $F = \mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$. Daraus folgt $\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}) = 0$; dies ist eine 3-Form. Schreibt man $\mathrm{d}F = 0$ in den Komponenten (=Faktoren vor dem Basiselement) aus, so erhält man genau $(*)$. Jetzt wird die 2-Form $*F$ berechnet:

$$\begin{aligned}
*F &= *(F_{01}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 + F_{02}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 + F_{03}\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{12}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + F_{13}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + F_{23}\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3) \\
&= -F_{01}\mathrm{d}x^2 \wedge x^3 + \ldots \\
&= \sum_{\mu<\nu} G_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = G \\
G &= \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dann kann man $(18.6b)$ umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G &= 4\pi \cdot \sigma_J \\
\sigma_J &= j^0 \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 - j^1 \cdot \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + j^2 \cdot \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 - j^3 \cdot \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2
\end{aligned}$$

In Komponenten ist

$$\partial_\mu G_{\nu\lambda} + \partial_\nu G_{\lambda\mu} + \partial_\lambda G_{\mu\nu} = 4\pi \cdot j^\kappa,$$

wobei $(\kappa, \mu, \nu, \lambda)$ eine gerade Permutation von $(0, 1, 2, 3)$ ist.

$$*\sigma_J = \omega_{\mathbf{J}} = \sum j_\kappa \cdot \mathrm{d}x^\kappa \qquad \text{mit} \qquad j_\kappa = j^\kappa$$

Dann kann man alles zusammenfassen:

- $(18.6a)$ wird zu $\mathrm{d}F = 0$.
- $(18.6b)$ wird zu $\mathrm{d}G = 4\pi \cdot \sigma_J$
- Es ist $\delta F = *\mathrm{d} * F = *\mathrm{d}G = *(4\pi \cdot \sigma_J) = 4\pi \cdot *\sigma_J = 4\pi \cdot \omega_{\mathbf{J}}$.