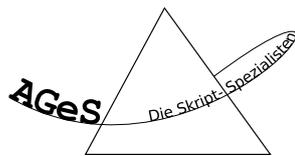


# Quantentheorie I

(Kompendium)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling  
Felix Lemke  
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>Grundlagen der Quantentheorie</b>	<b>3</b>
Kommutatorrelationen	
Statistische Aussagen	
Darstellung in den Eigenräumen der Fundamentaloperatoren	
Fundamentalbeispiel: Eindimensionaler harmonischer Oszillator	
<b>Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik</b>	<b>4</b>
Grundlegende Zeitabhängigkeiten	
Schrödingerbild	
Heisenbergbild	
Diracbild (Wechselwirkungsbild)	
Wahrscheinlichkeitsamplitude	
<b>Störungstheorie</b>	<b>5</b>
Dirac-Theorie	
Schrödinger-Theorie	
Ritzsches Variationsverfahren	
<b>Symmetrien und Erhaltungsgrößen, Drehimpulse</b>	<b>6</b>
Transformationen	
Darstellung von Transformationen	
Grundlagen des Drehimpulses	
Wichtige Beispiele für Drehimpulse	

## Kommutatorrelationen

- Orts- und Impulsoperator:  $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$  und  $[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = \hbar/i \cdot \delta_{ij} \cdot \mathbf{1}$
- beliebiger Operator  $\mathcal{F}(\hat{x}, \hat{p})$ :  $[\mathcal{F}, \hat{x}_k] = \hbar/i \cdot \partial\mathcal{F}/\partial\hat{p}_k$  und  $[\mathcal{F}, \hat{p}_k] = -\hbar/i \cdot \partial\mathcal{F}/\partial\hat{x}_k$
- Bahndrehimpulsoperator  $\hat{l} = \hat{x} \times \hat{p}$ :  $[\hat{l}_i, \hat{x}_k] = \hbar/i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \hat{x}_j$  und  $[\hat{l}_i, \hat{p}_j] = \hbar/i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \hat{p}_k$   
 $[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = -\hbar/i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot \hat{l}_k$  und  $[\hat{l}^2, \hat{l}_i] = 0$

## Statistische Aussagen

Sei  $\mathcal{F}$  der (hermitesche) Operator zur Observablen  $F$ .

- Erwartungswert:  $\overline{F} = \langle \mathcal{F} \rangle = \langle \varphi | \mathcal{F} \varphi \rangle = \text{Sp}(\mathcal{P}_{|\varphi\rangle} \mathcal{F}) = \text{Sp}(\mathcal{F} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle})$  mit  $\langle \varphi | \varphi \rangle = 1$
- Eigendarstellung des Erwartungswertes:  $\langle \mathcal{F} \rangle = \int_{\lambda} \lambda \cdot |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda$

Durch Messung der Observablen  $F$  geht das System in einen Eigenzustand von  $\mathcal{F}$  über. Kommutierende Observablen haben dieselben Eigenvektoren, können also gleichzeitig interferenzfrei gemessen werden.

- Messwahrscheinlichkeit des Eigenwertes  $\lambda$ :  $w_{\lambda} = |\langle u_{\lambda} | \varphi \rangle|^2 = \text{Sp}(\mathcal{P}_{|u_{\lambda}\rangle} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle})$
- Streuung:  $\text{Str } \mathcal{F} = \langle \mathcal{F}^2 \rangle - \langle \mathcal{F} \rangle^2 = \langle [\mathcal{F} - \langle \mathcal{F} \rangle]^2 \rangle$  – verschwindet, wenn  $|\varphi\rangle$  Eigenvektor von  $\mathcal{F}$  ist
- Unschärfe:  $\Delta F = \sqrt{\text{Str } \mathcal{F}}$
- Unschärferelation:  $\Delta F \cdot \Delta G \geq \frac{1}{2} \cdot |[\mathcal{F}, \mathcal{G}]|$
- Energie-Zeit-Unschärfe:  $\Delta E \cdot \Delta t_F \geq \hbar/2$  mit  $\Delta t_F = \Delta F / \left| \frac{d}{dt} \langle \mathcal{F} \rangle \right|$  (Zeit, in der sich die Observable  $F$  um ihre Unschärfe ändert)

## Darstellung in den Eigenräumen der Fundamentaloperatoren

- Orts-Translationsoperator:  $\mathcal{T}(\xi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \cdot \xi \cdot \hat{p}}$  mit  $\mathcal{T}(\xi)|u_x\rangle = |u_{x+\xi}\rangle$
- Ortsdarstellung der Fundamentaloperatoren:  $\hat{x}\varphi(x) = x \cdot \varphi(x)$  und  $\hat{p}\varphi(x) = \hbar/i \cdot \varphi'(x)$
- Impuls-Translationsoperator:  $\mathcal{S}(\xi) = e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \xi \cdot \hat{x}}$  mit  $\mathcal{S}(\xi)|u_p\rangle = |u_{p+\xi}\rangle$
- Impulsdarstellung der Fundamentaloperatoren:  $\hat{x}\varphi(p) = -\hbar/i \cdot \varphi'(p)$  und  $\hat{p}\varphi(p) = p \cdot \varphi(p)$
- Zusammenhang beider Darstellungen:  $\varphi(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} \cdot px} \cdot \varphi(x) dx$   
 $\varphi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} \cdot px} \cdot \varphi(p) dp$

## Fundamentalbeispiel: Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- Hamilton-Operator:  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \cdot \hat{p}^2 + \frac{m\omega}{2} \cdot \hat{x}^2 = \hbar\omega \cdot (\hat{b}^+ \cdot \hat{b} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}) \equiv \hbar\omega \cdot (\hat{n} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1})$   
(Eigenvektoren von  $\mathcal{H}$  und  $\hat{n}$  stimmen überein)
- Hebungs- und Senkungsoperator:  $\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \cdot \left[ \sqrt{m\omega} \cdot \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \cdot \hat{p} \right]$  und  $\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \cdot \left[ \sqrt{m\omega} \cdot \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \cdot \hat{p} \right]$
- Kommutatoren der neuen Operatoren:  $[\hat{b}, \hat{b}^+] = \mathbf{1}$  und  $[\hat{b}^q, \hat{n}] = q \cdot \hat{b}^q$  und  $[(\hat{b}^+)^q, \hat{n}] = -q \cdot (\hat{b}^+)^q$
- Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren:  $\hat{b}|u_n\rangle = \sqrt{n} \cdot |u_{n-1}\rangle$  und  $\hat{b}^+|u_n\rangle = \sqrt{n+1} \cdot |u_{n+1}\rangle$
- Generierung aller Eigenvektoren aus dem Grundzustand:  $|u_n\rangle = (n!)^{-1/2} \cdot (\hat{b}^+)^n |u_0\rangle$  mit  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Energieeigenwerte:  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \cdot \hbar\omega$

## Grundlegende Zeitabhängigkeiten

- zeitliche Änderung einer Observable:  $\dot{\mathcal{F}} = \frac{i}{\hbar} \cdot [\mathcal{H}, \mathcal{F}] + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}$
- Axiom:  $\dot{\mathcal{P}}_{|\varphi\rangle} = 0$ , also  $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle} = -\frac{i}{\hbar} \cdot [\mathcal{H}, \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}]$
- unitäre Transformation:  $\mathcal{F}^B(\hat{x}(t), \hat{p}(t), t) = \mathcal{A}(t, t_0) \cdot \mathcal{F}(\hat{x}(t_0), \hat{p}(t_0), t) \cdot \mathcal{A}^{-1}(t, t_0)$
- Eigenschaften der Transformation:  $\mathcal{A}(t_0, t_0) = 1$  und  $\mathcal{A}(t, t_0) = \mathcal{A}(t, t_1) \cdot \mathcal{A}(t_1, t_0)$  und  $\mathcal{A}^+(t, t_0) = \mathcal{A}(t_0, t)$
- Ehrenfest-Theorem:  $\frac{d}{dt} \langle \mathcal{F} \rangle (t) = \langle \dot{\mathcal{F}} \rangle (t)$  (Erhaltungsgrößen:  $\dot{\mathcal{F}} = 0$ )

## Schrödingerbild

- definierende Transformation:  $\mathcal{A}^S(t, t_0) = \mathbf{1}$
- Observable:  $\frac{d}{dt} \mathcal{F}^S(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}\right)^S$
- Projektionsoperator:  $\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}^S(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}\right)^S = -\frac{i}{\hbar} \cdot [\mathcal{H}^S, \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}^S]$
- Zustandsvektor:  $\frac{d}{dt} |\varphi^S(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H}^S(t) |\varphi^S(t)\rangle$
- formale Lösung der Bewegungsgleichung:  $|\varphi^S(t)\rangle = \mathcal{U}^S(t, t_0) |\varphi^S(t_0)\rangle$   
Hierbei ist  $\mathcal{U}^S$  unitär,  $\frac{d}{dt} \mathcal{U}^S(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H}^S(t) \cdot \mathcal{U}^S(t, t_0)$  und  $\mathcal{U}^S(t_0, t_0) = \mathbf{1}$ .

→ Die Zeitabhängigkeit liegt ausschließlich beim Zustandsvektor, die Observablen bleiben zeitunabhängig.

## Heisenbergbild

- definierende Transformation:  $\frac{d}{dt} \mathcal{A}^H(t, t_0) = \frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H}^H(t) \cdot \mathcal{A}^H(t, t_0)$
- Observable:  $\frac{d}{dt} \mathcal{F}^H = \frac{i}{\hbar} \cdot [\mathcal{H}^H(t), \mathcal{F}^H(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}\right)^H(t)$ , also  $\mathcal{F}^H(t) = \mathcal{F}(\hat{x}^H(t), \hat{p}^H(t), t)$
- Projektionsoperator:  $\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}^H = 0$
- Zustandsvektor:  $|\varphi^H(t)\rangle = |\varphi^H(t_0)\rangle$

→ Die Zeitabhängigkeit liegt ausschließlich bei den Observablen, der Zustandsvektor ist zeitunabhängig.

## Diracbild (Wechselwirkungsbild)

Betrachte einen Hamilton-Operator  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0(t) + \mathcal{H}_1(t)$  (mit einem Störungsanteil  $\mathcal{H}_1(t)$ ).

- definierende Transformation:  $\frac{d}{dt} \mathcal{A}^W(t, t_0) = \frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H}_0^W(t) \cdot \mathcal{A}^W(t, t_0)$
- Observable:  $\frac{d}{dt} \mathcal{F}^W = \frac{i}{\hbar} \cdot [\mathcal{H}_0^W(t), \mathcal{F}^W(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}\right)^W(t)$
- Projektionsoperator:  $\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}^W = -\frac{i}{\hbar} \cdot [\mathcal{H}_1^W(t), \mathcal{P}_{|\varphi\rangle}^W(t)]$
- Zustandsvektor:  $\frac{d}{dt} |\varphi^W(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H}_1^W(t) |\varphi^W(t)\rangle$  (formale Lösung wie beim Schrödingerbild möglich)
- formale Lösung der Bewegungsgleichung:  $|\varphi^W(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\varphi^W(t_0)\rangle$   
Hierbei ist  $\mathcal{U}^W$  unitär,  $\frac{d}{dt} \mathcal{U}^W(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H}_1^W(t) \cdot \mathcal{U}^W(t, t_0)$  und  $\mathcal{U}^W(t_0, t_0) = \mathbf{1}$ .

→ Die Dynamik der Observablen wird durch  $\mathcal{H}_0$ , die des Zustandsvektors durch  $\mathcal{H}_1$  bestimmt.

## Wahrscheinlichkeitsamplitude

Betrachte einen nicht explizit zeitabhängigen Operator  $\mathcal{F}$  mit den Eigenwerten  $\lambda$  und Eigenvektoren  $|u_\lambda\rangle$ .

- Die Wahrscheinlichkeitsamplitude ist als Skalarprodukt (d.h. als  $\varphi(\lambda, t) = \langle u_\lambda | \varphi(t) \rangle$ ) bildunabhängig.
- Zeitabhängige Schrödingergleichung:  $\frac{d}{dt} \varphi(\lambda, t) = -\frac{i}{\hbar} \cdot \mathcal{H} \varphi(\lambda, t)$

**Die Verwendung dieses Kompodiums für Klausuren und andere Prüfungen ist nicht gestattet.**

## Dirac-Theorie

Der Hamiltonoperator enthalte einen Störungsterm:  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t)$  – Es sollen im Wechselwirkungsbild Aussagen über die Veränderung des Zustandsvektors getroffen werden.

- iterative Lösung der Bew.gleichung:  $\mathcal{U}_{(n)}^W(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \cdot \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(t_1) \cdot \mathcal{U}_{(n-1)}^W(t_1, t_0) dt_1$  mit  $\mathcal{U}_{(0)}^W(t, t_0) = \mathbf{1}$

Zum Zeitpunkt  $t_0$  befinde sich das System im Zustand  $|\varphi^W(t_0)\rangle = |u_a\rangle$  (Eigenzustand von  $\mathcal{H}_0$ ).

- Übergangswahrscheinlichkeit durch Störung:  $w_{a \rightarrow b}(t) = |\langle u_b | \varphi^W(t) \rangle|^2$
- Lösung in erster Ordnung:  $w_{a \rightarrow b}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \cdot \left| \int_{t_0}^t \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \cdot (E_b^0 - E_a^0) \cdot (t_1 - t_0) \right] \cdot \langle u_b | \mathcal{H}_1(t_1) u_a \rangle dt_1 \right|^2$

Sei der Störungsterm nicht explizit zeitabhängig. Für hinreichend große Zeiten  $t$  gilt asymptotisch:

- Goldene Regel der Quantentheorie:  $w_{a \rightarrow b}(t) = \frac{|\langle u_b | \mathcal{H}_1 u_a \rangle|^2}{\hbar^2} \cdot 2\pi t \cdot \delta(\omega_{ba})$  mit  $\omega_{ba} = (E_b^0 - E_a^0)/\hbar$

## Schrödinger-Theorie

Der Hamiltonoperator enthalte eine *kleine* Störung  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \cdot \mathcal{H}_1$  – Wie verändern sich die Energieeigenwerte  $|u_n^{(0)}\rangle$  durch die Störung?

- Ansatz:  $E_n = E_n^{(0)} + \lambda \cdot E_n^{(1)} + \lambda^2 \cdot E_n^{(2)} + \dots$  und  $|u_n\rangle = |u_n^{(0)}\rangle + \lambda \cdot |u_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 \cdot |u_n^{(2)}\rangle + \dots$

Das Eigenwertproblem liefert nach Koeffizientenvergleich für Potenzen von  $\lambda$  das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 |u_n^{(0)}\rangle &= E_n^{(0)} \cdot |u_n^{(0)}\rangle \\ \mathcal{H}_0 |u_n^{(1)}\rangle + \mathcal{H}_1 |u_n^{(0)}\rangle &= E_n^{(0)} \cdot |u_n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} \cdot |u_n^{(0)}\rangle \\ \mathcal{H}_0 |u_n^{(2)}\rangle + \mathcal{H}_1 |u_n^{(1)}\rangle &= E_n^{(0)} \cdot |u_n^{(2)}\rangle + E_n^{(1)} \cdot |u_n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)} \cdot |u_n^{(0)}\rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Orthonormierungsbedingung liefert auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= \langle u_m^{(0)} | u_n^{(0)} \rangle \\ 0 &= \langle u_m^{(0)} | u_n^{(1)} \rangle + \langle u_m^{(1)} | u_n^{(0)} \rangle \\ 0 &= \langle u_m^{(0)} | u_n^{(2)} \rangle + \langle u_m^{(1)} | u_n^{(1)} \rangle + \langle u_m^{(2)} | u_n^{(0)} \rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

- iterative Lösung der Energieeigenwerte:  $E_n^{(m)} = \langle u_n^{(m-1)} | \mathcal{H}_1 u_n^{(m-1)} \rangle$
- Energieeigenvektor in erster Ordnung:  $|u_n\rangle = |u_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} |u_m^{(0)}\rangle \cdot \frac{\langle u_m^{(0)} | \mathcal{H}_1 u_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$
- Energiekorrekturen in erster und zweiter Ordnung:  $E_n^{(1)} = \langle u_n^{(0)} | \mathcal{H}_1 u_n^{(0)} \rangle$  und  $E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle u_m^{(0)} | \mathcal{H}_1 u_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$

Bei entarteten Energien muss diese Summe alle Eigenvektoren zu anderen Eigenwerten enthalten.

## Ritzsches Variationsverfahren

Gesucht ist die Energie  $E_0$  des Grundzustandes  $|u_0\rangle$  für ein System mit dem Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$ .

- Rayleigh-Ritz-Prinzip:  $E_0 \leq \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{\langle \varphi | \mathcal{H} \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$  für alle Zustandsvektoren  $|\varphi\rangle$
- Ritzsches Variationsverfahren: Man wählt  $|\varphi\rangle$  als Funktion eines Parameters und sucht das Minimum der Energie  $E(\mu) = \frac{\langle \varphi(\mu) | \mathcal{H} \varphi(\mu) \rangle}{\langle \varphi(\mu) | \varphi(\mu) \rangle}$ .

## Transformationen

- Transformation:  $g$  (Struktur a priori unbekannt) mit zugehörigem unitären Operator  $\mathcal{D}(g)$
- Anwendung auf eine Observable:  $\mathcal{F}' = \mathcal{D}(g) \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{D}^{-1}(g)$
- Die Menge der Transformationen bildet mit der Verkettung (bzw. Operatormultiplikation) eine Gruppe.
- Transformationsgruppe des Hamilton-Operators:  $\mathcal{D}(g)$  mit  $[\mathcal{D}(g), \mathcal{H}] = 0$   
Nicht explizit zeitabhängige  $\mathcal{D}(g)$  aus der Transformationsgruppe von  $\mathcal{H}$  sind Erhaltungsgrößen.
- Struktur einer kontinuierlichen Symmetrieoperation:  $\mathcal{D}(g) = e^{-\frac{i}{\hbar} \cdot g \cdot \mathcal{F}}$  mit Generator  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$   
Die  $\mathcal{D}(g)$  sind genau dann in der Transformationsgruppe von  $\mathcal{H}$ , wenn  $\mathcal{F}$  eine Erhaltungsgröße ist.

## Darstellung von Transformationen

Betrachte eine Transformation  $\mathcal{D}(g)$  aus der Transformationsgruppe des Hamilton-Operators  $\mathcal{H}$ . Ist  $|u_\lambda\rangle$  ein Eigenvektor von  $\mathcal{H}$ , dann auch  $\mathcal{D}(g)|u_\lambda\rangle$  (zum selben Eigenwert).

- Beschreibung der Transformation im Falle der Entartung:  $\mathcal{D}(g)|u_\lambda^\mu\rangle = \sum_{\mu'=1}^{t_\lambda} D_\lambda^{\mu'\mu}(g) \cdot |u_\lambda^{\mu'}\rangle$   
Die entstehende Matrix  $\mathbf{D}_\lambda(g)$  heißt reduzibel, wenn sie in Untermatrizen in Blockgestalt zerfällt. Die minimalen Untermatrizen entsprechenden irreduziblen Unterdarstellungen.

## Grundlagen des Drehimpulses

- allgemeiner Drehimpulsoperator:  $\vec{\mathcal{J}}$  generiert eine kontinuierliche Transformationsgruppe (Kommutatoren zwischen den  $\mathcal{J}_i$  und mit  $\vec{\mathcal{J}}^2$  in Analogie zum Bahndrehimpuls)
- Transformationen:  $\mathcal{R}_{\vec{e}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \cdot \alpha \cdot (\vec{e} \cdot \vec{\mathcal{J}})}$  (Drehung um Achse entlang Einheitsvektor  $\vec{e}$ )
- Eigenwertproblem:  $\vec{\mathcal{J}}^2 |u_j^m\rangle = j(j+1) \cdot \hbar^2 \cdot |u_j^m\rangle$  und  $\mathcal{J}_z |u_j^m\rangle = m \cdot \hbar \cdot |u_j^m\rangle$  mit  $m = -j, \dots, j$
- Hebungs- und Senkungsoperatoren:  $\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_x \pm i \cdot \mathcal{J}_y$  mit  $\vec{\mathcal{J}}^2 = \mathcal{J}_- \cdot \mathcal{J}_+ + \hbar \cdot \mathcal{J}_z + \mathcal{J}_z^2$
- Kommutatorrelationen:  $[\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = 2\hbar \cdot \mathcal{J}_z$  und  $[\mathcal{J}_z, \mathcal{J}_\pm] = \pm \hbar \cdot \mathcal{J}_\pm$
- Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren:  $\mathcal{J}_\pm |u_j^m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \cdot \hbar \cdot |u_j^{m \pm 1}\rangle$  mit  $\mathcal{J}_\pm |u_j^{\pm j}\rangle = 0$
- Erzeugung aus Extremalzuständen:  $|u_j^m\rangle = \sqrt{\frac{(j \mp m)!}{(2j)! \cdot (j \pm m)!}} \cdot \left(\frac{\mathcal{J}_\pm}{\hbar}\right)^{j \pm m} |u_j^{\mp j}\rangle$
- Beschreibung des unitären Raumes benötigt man noch mindestens eine weitere kommutierende Observable

## Wichtige Beispiele für Drehimpulse

- Beim Bahndrehimpuls  $\hat{l}$  ist  $j$  (bzw.  $l$ ) ganzzahlig. Ortsdarstellung der entsprechenden Operatoren:  

$$\hat{l}_\pm = \hbar \cdot e^{\pm i\varphi} \cdot \left[ \pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cdot \cot \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad \hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \cdot \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad \Delta \psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \psi(\vec{r})] - \frac{1}{r^2 \cdot \hbar^2} \cdot \hat{l}^2 \psi(\vec{r})$$
- Der Spin  $\hat{s}$  ist nicht im gewöhnlichen Orts-Impuls-Raum beschreibbar. Es sind  $j \rightarrow s = 1/2$  und  $m = \pm 1/2$ . Im neuen zweidimensionalen Spin-Raum gibt es die folgenden Spinoperatoren (in Matrixdarstellung):

$$\begin{aligned} \langle u^m | \hat{s}^2 | u^{m'} \rangle &= \frac{3}{4} \cdot \hbar^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \langle u^m | \hat{s}_+ | u^{m'} \rangle &= \hbar \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \langle u^m | \hat{s}_x | u^{m'} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \langle u^m | \hat{s}_z | u^{m'} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \langle u^m | \hat{s}_- | u^{m'} \rangle &= \hbar \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \langle u^m | \hat{s}_y | u^{m'} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Pauli-Spinmatrizen: Matrixdarstellungen der Operatoren  $\hat{\sigma}_i = \frac{2}{\hbar} \cdot \hat{s}_i$  mit  $i = x, y, z$
- Rechenregeln:  $\hat{s}_\pm^2 = 0$  und  $\hat{s}_i^2 = \frac{1}{3} \cdot \hat{s}^2 = \frac{1}{4} \cdot \hbar^2 \cdot \mathbf{1}$

$$\hat{s}_x \cdot \hat{s}_y = -\hat{s}_y \cdot \hat{s}_x = -\frac{\hbar}{2i} \cdot \hat{s}_z \quad \text{und} \quad \hat{s}_x \cdot \hat{s}_y \cdot \hat{s}_z = -\frac{\hbar^3}{8i} \cdot \mathbf{1}$$