TEILCHEN- UND KERNPHYSIK

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Michael Kobel
(Wintersemester 2008/09)

Herausgegeben von

Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 22. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
`www.ages-skripte.org`

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

1 Einführung. Ziele. Motivation

Zunächst müssen wir einen wichtigen Begriff definieren.

Elementarteilchen

Quantenobjekt ohne permanente Substruktur

Ein Gegenbeispiel ist das Proton, welches aus drei Quarks zusammengesetzt ist. Elektronen hingegen sind Elementarteilchen (man hat bereits gezeigt, dass sie bis zu einer Auflösung von 10^{-19} m punktförmig sind). Dabei emittiert das Elektron jedoch ständig Photonen, die es kurz darauf wieder einfängt; es existieren also temporäre Substrukturen.

Die wichtigsten Eigenschaften eines Elementarteilchens sind

- im Hinblick auf die Wechselwirkungseigenschaften mit anderen Teilchen:
  - (nominelle) **Ruhmasse** m
  - **elektrische Ladung** Q
  - **schwache Ladung** I^w
  - **starke Ladung** bzw. **Farbladung**
  - **Spin** $J = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$
    - Higgs-Teilchen: $J = 0$ (vermutet)
    - **Bausteinteilchen**: $J = 1/2$ (**Fermionen**: Quarks, Elektronen, Neutrinos, etc.)
    - **Wechselwirkungsteilchen**: $J = 1$ (**Bosonen**)
    - Gravitino: $J = 3/2$ (vermutet)
    - Graviton: $J = 2$ (vermutet)
    - Man geht davon aus, dass andere Werte für J nicht möglich sind.
- im Hinblick auf Symmetrien der Wellenfunktion:
  - **Parität** $P = \pm 1$ (Symmetrie hinsichtlich der Raumspiegelung)
  - **Ladungskonjugation** $C = \pm 1$ (Symmetrie beim Übergang vom Teilchen zum Antiteilchen)

  Schreibweise für Spin, Parität und Ladungskonjugation: J^{PC}, also z.B. $\gamma 1^{--}$ für ein Photon
- Lebensdauer τ (Beziehung zur Ruhmasse mit Heisenbergscher Unschärferelation: $\Delta m \cdot \tau = \hbar$)

Die Grundlagenforschung im Bereich der Teilchenphysik untersucht die Grenzen der bekannten Grundgrößen:

- Zeit: Es wird angestrebt, auch Prozesse zu untersuchen, die 10^{-12} s nach dem Urknall stattgefunden haben. (Kurz nach dem Urknall hatten die Teilchen eine sehr hohe mittlere Energie. Um solche Prozesse zu untersuchen, benötigen wir also auch Teilchen mit sehr hoher Temperatur und damit sehr hoher Energie.)

- Raum: Gibt es mehr als drei Raumdimensionen?
- Materie: Kennen wir schon alle Elementarteilchen, welche Symmetrien bestimmen ihre Wechselwirkungen? Gibt es neue Symmetrien? Woher bekommen die Teilchen ihre Masse? Daran schließt sich die Frage an: Was ist überhaupt Masse?

Zu diesen Grundparametern des Universums gesellen sich die fundamentalen Kräfte und deren Austauschteilchen:

- **starke Wechselwirkung** (**Gluonen**)
- **schwache Wechselwirkung** (**W-** und **Z-Bosonen**, seltener: **Weakonen**)
- **elekromagnetische Wechselwirkung** (**Photonen**)
- **Gravitation** (**Gravitonen**)

Wechselwirkungen entstehen aus Symmetrien in den Elementarteilchen. Zum Beispiel besteht (in der Anschauung der Farbladung) ein Neutron aus einem grünen up-Quark und einem blauen bzw. einem roten down-Quark. Stellt man sich die Farbladung als einen Vektor vor, hat das Neutron in der Summe eine Gesamtfarbladung von Null, was die hohe Stabilität des Quark-Verbundes erklärt.

Die Symmetrien erfordern immer masselose Teilchen. Die Masse entstand also ungefähr 10^{-10} s nach dem Urknall durch eine spontane Symmetriebrechung. Als Ursache dafür könnte ein Kopplung der Masse an ein Higgs-Hintergrundfeld.

Die bekannten Elementarteilchen unterteilt man in drei Familien:

Familie	**1**	**2**	**3**	Q	I_3^w	**Farbladung**
Quarks	**up** (u)	**charm** (c)	**top** (t)	$+2/3$	$+1/2$	r,g,b
	down (d)	**strange** (s)	**bottom** (b)	$-1/3$	$-1/2$	r,g,b
Leptonen	**El.-Neutrino** ν_1	**M.-Neutrino** ν_2	**T.-Neutrino** ν_3	0	$+1/2$	0
	Elektron e	**Myon** μ	**Tauon** τ	-1	$-1/2$	0

Die stabile Materie (Protonen, Elektronen und Neutronen) setzt sich aus Teilchen der ersten Familie zusammen. Alle anderen Teilchen sind instabil und entstehen nur bei hohen Energien, kamen also natürlich nur in den ersten Momenten nach dem Urknall vor. Ihre vergleichsweise hohe Masse erhalten Atome nur zu etwa einem Prozent aus der Ruhemasse ihrer Bausteine, und zu über 99 Prozent aus der Energie der Bindungen. Würde sich zum Beispiel die Elektronmasse ändern, gäbe es kaum einen Effekt auf die Atommassen und auf die Massendichte im Universum, aber einen riesigen Effekt auf das Verhalten der Materie. (Zum Beispiel hat die Rydberg-Konstante eine lineare Abhängigkeit von der Elektronmasse.)

2 Natürliche Einheiten

Ganz kurzgefasst wollen wir ein Einheitensystem wählen, in dem $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ gilt. Warum sollten wir das tun?

Naturkonstanten (z.B. ε_0, c, G_N, k_B, μ_0, e, m_e, $\hbar$) kann man in mehrere Klassen aufteilen:

1. überflüssige Konstanten, die durch die menschliche Einheitenwahl bedingt sind
2. Konstanten, die als natürliche Skalen fungieren (also an standardisierte Messverfahren gekoppelt sind) – zum Beispiel das Kilogramm, das Meter und die Sekunde
3. wirkliche Naturkonstanten, die nicht aus anderen Konstanten herleitbar sind

Wir ordnen die oben genannten Konstanten beispielhaft ein: (Es gibt im Standardmodell noch zwanzig weitere Konstanten.)

1. ε_0, μ_0, k_B
2. c, G_N, $\hbar$
3. m_e, e

Beispiel 2.1 zur Boltzmann-Konstante

In der Thermodynamik gilt $E = k_B \cdot T/2$ (pro Freiheitsgrad). Wählt man k_B nicht in der Einheit J/K, sondern in 1, kann man die Temperatur auch in Joule oder Elektronenvolt messen. (Dann entspricht ein Kelvin etwa 11000 eV, und die Zimmertemperatur ist etwa 25,3 meV.)

2.1 Planck-Einheiten

Im klassischen Einheitensystem haben wir Größen wie $\hbar = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js und $G_N = 6{,}7 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$. Was man sich auch merken sollte, ist, dass die Lichtgeschwindigkeit ausreichend mit $c = 3 \cdot 10^8\ (m/s)$ anzugeben ist.

Es lassen sich drei fundamentale Skalen bilden:

- Planck-Länge: $x_p = \sqrt{G_N \cdot \hbar / c^3} \approx 10^{-35}\,\mathrm{m}$
- Planck-Zeit: $t_p = x_p/c = \sqrt{G_N \cdot \hbar / c^5} \approx 10^{-43}\,\mathrm{s}$
- Planck-Energie: $E_p = \hbar / t_p = \sqrt{\hbar \cdot c^5 / G_N} \approx 10^9\,\mathrm{J} \approx 10^{19}\,\mathrm{GeV}$

Aus letzterem ergibt sich sofort die Planck-Masse $M_p = E_p/c^2 = \sqrt{\hbar \cdot c / G_N} \approx 10^{-8}\,\mathrm{kg}$. Jenseits der Planckskalen endet unsere heutige Physik. **Planck-Einheiten** werden durch ein Hut dargestellt, zum Beispiel für Länge und Masse:

$$\widehat{x} \equiv \frac{x}{x_p} \quad \text{und} \quad \widehat{m} = \frac{m}{M_p}$$

In diesen Einheiten ist $\widehat{x}_p = \widehat{t}_p = \widehat{E}_p = \widehat{M}_p = 1$. Damit gilt für die ursprünglich zur Bildung der Planck-Skalen verwendeten Naturkonstanten: $c = \hbar = G_N = 1$

Das Problem mit diesen Einheiten ist, dass sie viel zu klein sind. Ein Atomdurchmesser wäre zum Beispiel $\widehat{d} \approx 10^{25}$. Komfortabler wären Einheiten, die sich in den normalen Größenordnungen der Teilchenphysik bewegen, zum Beispiel:

- Teilchengröße: $x \approx 10^{-18} \cdots 10^{-18}\,\mathrm{m}$
- Zerfallsdauer: $t \approx 10^{-12} \cdots 10^{-24}\,\mathrm{s}$
- Massen: $m \approx 1 \cdot 1000\,\mathrm{GeV}$

2.2 Heavyside-Lorentz-Einheiten („Natürliche Einheiten“)

Wir setzen $\hbar = c = 1$, zusätzlich auch $\mu_0 = \varepsilon_0 = k_B = 1$, *nicht* aber $G_N = 1$. Wir erhalten eine neue dritte fundamentale Skala, die Energie in GeV. Alle anderen Größen haben dann eine Einheit GeV^n, zum Beispiel:

- Energie, Impuls, Masse: $[E] = [p] = [M] = \mathrm{GeV}$
- Länge, Zeit: $[x] = [t] = \mathrm{GeV}^{-1}$ – Das folgt unmittelbar aus der Heisenberg-Unschärferelation.
- Kraft: $[F] = \mathrm{GeV}^2$ – Das folgt aus $E = \int F\,\mathrm{d}s$.

Beispiel 2.2 Feinstrukturkonstante

In SI-Einheiten ist $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\hbar\cdot c} \approx \frac{1}{137{,}036\ldots}$. In natürlichen Einheiten verbleibt $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, mit dem bekannten Wert für α folgt $e \approx 0{,}303\ldots$. Wir werden sehen, dass die Elementarladung eine Wahrscheinlichkeit beschreibt.

2.3 Umrechnung zwischen SI- und natürlichen Einheiten

Man muss sich merken:

(I) $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ (ziemlich genau)

(II) $\hbar \cdot c = 0{,}2\,\mathrm{GeV} \cdot \mathrm{fm}$ (sogar fast exakt)

(III) $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Nun funktioniert die Umrechnung wie folgt:

1. Stimme Potenz von kg mit (III) ab.
2. Stimme Potenz von s mit (I) ab
3. Stimme Potenz von m mit (II) ab.

Beispiel 2.3 Umrechung von $G_N \approx 7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Wir gehen die Schritte durch: (Beachte im zweiten Schritt $c = 1$.)

1. $G_N = 7 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{eV}} = 11 \cdot 10^{-26}\,\frac{\mathrm{m}^5}{\mathrm{s}^4}$
2. $G_N = 11 \cdot 10^{-26}\,\frac{\mathrm{m}^5}{\mathrm{s}^4} \cdot \frac{1}{\mathrm{GeV}} \cdot \frac{c^4}{(3\cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1})^4} = 1{,}4 \cdot 10^{-54}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{GeV}}$
3. $G_N = 1{,}4 \cdot 10^{-54}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{GeV}} \cdot \frac{\hbar c}{0{,}2\,\mathrm{GeV}\cdot\mathrm{fm}} = 0,7 \cdot 10^{-38}\,\mathrm{GeV}^{-2}$

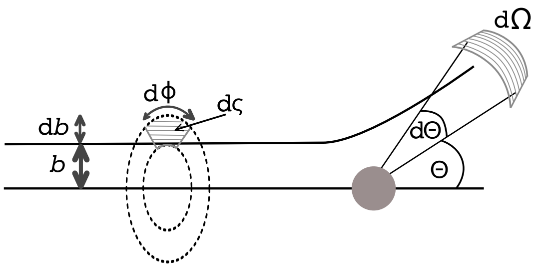
Am Rande: Anders ausgedrückt ist $G_N = 1/(1,2 \cdot 10^{19}\,\mathrm{GeV}^2) = 1/M_p^2$. Dies sieht man auch schneller aus $M_p = E_p/c^2 = \sqrt{\hbar c/G_N} = 1/\sqrt{G_N}$.

3 Streuprozesse

Streuprozesse sind ein Grundbestandteil der experimentellen Arbeit der Teilchenphysiker. Die Streuprozesse werden mit sehr hohen Energien ausgeführt, um eine möglichst hohe Auflösung zu erzielen (gemäß Heisenberg-Unschärferelation) und evtl. neue Teilchen zu erzeugen (nach $E = mc^2$).

3.1 Wirkungsquerschnitt

Man beschießt ein Target mit Projektilen und es gibt eine Wechselwirkung, z.B. eine elektrische Kraft, durch welche das Projektil abgelenkt wird. Es gibt einen variablen Stoßparameter b. Die Frage ist, wieviele Teilchen, die mit einem Stoßparameter $b \cdots b + \mathrm{d}b$ in dem Winkel $\varphi \cdots \varphi + \mathrm{d}\varphi$ einfallen (also durch das Flächenelement $\mathrm{d}\sigma = b \cdot \mathrm{d}b\mathrm{d}\varphi$), durch das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}\theta$ unter dem Ablenkwinkel θ gemessen werden (also auf dem Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$).



Klassisches Bild des Wirkungsquerschnittes

Die Eigenschaften des Targets stecken in der Winkelablenkung, das heißt: in $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}b}$. Da in der klassischen Mechanik die Relation $\theta(b)$ exakt bekannt ist, ergibt sich einfach:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|}$$

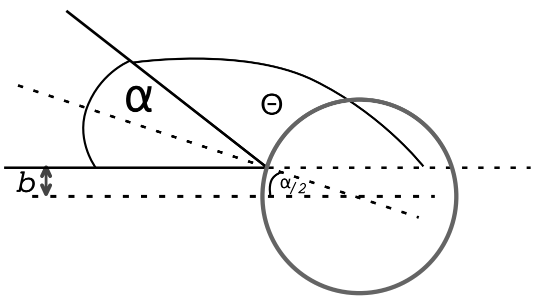
differentieller Wirkungsquerschnitt

Als einfaches Beispiel nehmen wir an, dass das Projektil und das Target ein harte Kugel ist.

$$b = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = R \cdot \cos\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{R}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{R}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{R^2}{4}$$



Kugelförmiges Target

Wir können zudem den **totalen Wirkungsquerschnitt** definieren:

$$\sigma_{tot} = \int\limits_{\mathrm{d}\Omega} \mathrm{d}\sigma = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{R^2}{4}\,\mathrm{d}\Omega = R^2 \cdot \pi$$

In natürlichen Einheiten ist $[\sigma] = \mathrm{m}^2 = 1/\,\mathrm{GeV}$. Typisch für die Teilchenphysik sind hierfür fm^2. Also führt man eine neue Einheit Barn ein:

$$100\,\mathrm{fm}^2 = 1\,\mathrm{b} = 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$$

„Barn“ ist das englische Wort für Scheunentor, und diese Fläche entspricht in Teilchenphysikmaßstäben auch einem großen Scheunentor. (Typische Größen sind Nanobarn bis Femtobarn.)

Beispiel 3.1

Wir betrachten eine Proton-Proton-Kollision:

$$\sigma_{pp}(E_p = 10\,\mathrm{GeV}) \approx 40\,\mathrm{mb} \approx \mathrm{fm}^2 \approx r_p^2$$

Für eine Neutrino-Proton-Kollision ergibt sich:

$$\sigma_{\nu p} \approx 70\,\mathrm{fm}^2$$

Nur ein Teil von 10^{-12} der Neutrino-Energie wechselwirkt mit dem Proton (durch schwache Wechselwirkung).

Die typische Aufgabenstellung ist die Messung des differentiellen Wirkungsquerschnittes:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}(\theta, \varphi)$$

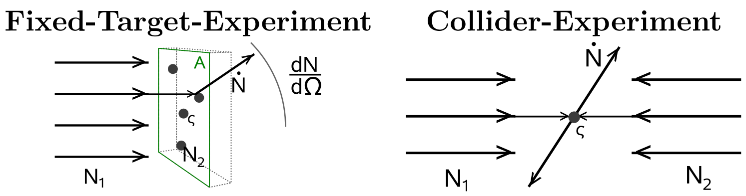
3.2 Luminosität

Messe die Anzahl $\dot{N}$ der gestreuten Teilchen pro Zeitintervall, bzw. die differentielle Änderung $\mathrm{d}\dot{N}/\mathrm{d}\Omega$. Wie gelangt man damit zum differentiellen Wirkungsquerschnitt?

Luminosität eine dem experimentellen Aufbau immanente Größe $\mathcal{L}$ mit:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{N}}{\mathrm{d}\Omega} = \mathcal{L} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \qquad \text{und} \qquad \dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma_{\mathrm{tot}}$$

In der Praxis versucht man, eine möglichst hohe Luminosität zu erzielen, um auch möglichst kleine Wirkungsquerschnitte effizient und präzise messen zu können. Deshalb muss insbesondere die Luminosität sehr genau bestimmt werden. Man betrachtet zwei Fälle:



Zum Fixed-Target-Experiment: Insgesamt wird die Targetfläche A beschossen. Auf dieser Fläche befinden sich N_2 Teilchen (unter der Annahme eines dünnen Targets) mit dem einzelnen Wirkungsquerschnitt σ, also ist die Fläche $N_2 \cdot \sigma / A$ abgedeckt. Es ist sinnvoll, den einfallenden Fluss $\Phi = \mathrm{d}N_1/(\mathrm{d}t \cdot A)$ zu definieren:

$$\dot{N} = \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} \cdot N_2 \cdot \frac{\sigma}{A} = \Phi \cdot N_2 \cdot \sigma$$

Mit der Dichte n_2 der Targetteilchen (nicht Massendichte, sondern Anzahldichte) ergibt sich hieraus:

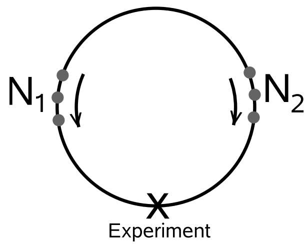
$$\mathcal{L} = \Phi \cdot N_2 = \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} \cdot n_2 \cdot d$$

Zur praktischen Berechnung verwendet man:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{FT}} = \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} \cdot n_2 \cdot d}$$

Beim Collider-Experiment verwendet man in der Praxis einen Beschleunigerring. Man schickt k Pakete mit der Frequenz $f = 1/T$ aufeinander. Der Fluss ergibt sich aus:

$$\Phi = k \cdot \frac{N_1 \cdot f}{A}$$



Beschleunigerring

Hierbei ist A die Querschnittsfläche des Paketes, der sich aus den Ortsunschärfen Δ_x und Δ_y (Gaußsche Breiten) ergibt:

$$A = 4\pi \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y$$

Wir definieren den Ladungsstrom $I_i = kf \cdot e \cdot N_i$, und erhalten damit:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Coll}} = kf \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{A} = \frac{kf}{4\pi} \cdot \frac{N_1 N_2}{\Delta_x \cdot \Delta_y} = \frac{1}{4\pi \cdot e^2 \cdot k \cdot f} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{\Delta_x \cdot \Delta_y}$$

Beispiel 3.2 Zahlenbeispiel

Im Fixed-Target-Experiment ergeben sich typische Werte von:

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} \sim \frac{10^{12}}{s} \quad \text{und} \quad n_2 \approx 10^{24} \frac{1}{\mathrm{cm}^3} \quad \text{und} \quad d = 1\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = 10^{35} \frac{1}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}$$

Beim Colliderexperiment (hier: Large Electron Positron Collider) hatte man:

$$k = 4 \quad \text{und} \quad f = \frac{10^4}{\mathrm{s}} \quad \text{und} \quad N_1 = N_2 = 3 \cdot 10^{11} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \Delta_x = 10^{-2}\,\mathrm{cm} \\ \Delta_y = 10^{-3}\,\mathrm{cm} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = 3 \cdot 10^{31} \frac{1}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}$$

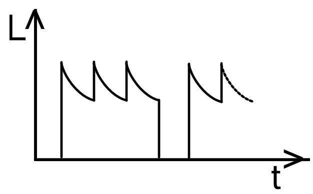
Dies ist der Nachteil der Colliderexperimente: Zwar kann man hier mit geringeren Beschleunigungsenergien hohe Schwerpunktsenergien erreichen, allerdings erreichen die Collider eine nicht so hohe Luminosität wie Fixed-Target-Experimente.

Die Luminosität $\mathcal{L}$ wird meist in der anschaulicheren Einheit „je Picobarn und Tag“ angegeben:

$$[\mathcal{L}] = \frac{1}{\mathrm{pb} \cdot \mathrm{d}} \approx 10^{31} \frac{1}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}$$

Diese Einheit entspricht einem totalen Wirkungsquerschnitt von einem Picobarn, also einem Ereignis pro Tag. Man muss beachten, dass die Luminosität im Allgemeinen zeitabhängig ist. Die durch das Experiment insgesamt akquirierte Datenmenge wird in der integrierten Luminosität angegeben:

$$\left[\int \mathcal{L}(t)\,\mathrm{d}t\right] = \mathrm{pb}^{-1}$$

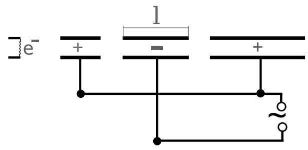


Luminosität im Collider

3.3 Beschleuniger

In der Teilchenphysik werden Energien im GeV- bis TeV-Bereich benötigt. Nur so erhält man sehr gute Auflösungen ($\Delta_x \approx$ fm), massive Teilchen ($m \approx 100\,\text{GeV}$) und Zeiten aus dem kosmologischem Bereich ($t \lesssim 10^{-12}\,\text{s}$). Man muss also iterativ beschleunigen:

- Der **Linearbeschleuniger** eine gerade Beschleunigungsstrecke aus einzelnen Rohren, zwischen denen eine Wechselspannung herrscht, sodass die Teilchen jeweils auf den Strecken zwischen den Rohren beschleunigt werden. Damit die Beschleunigungswirkung immer in dieselbe Richtung wirkt, legt eine Wechselspannung konstanter Frequenz ν_{HF} an, und vergrößert die Länge der einzelnen Segmente:

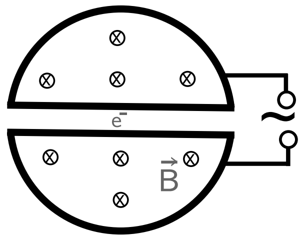


Linarbeschleuniger

$$l_i = \frac{v_i}{2\nu_{\text{HF}}} \sim \frac{\sqrt{i}}{\nu_{\text{HF}}} \quad \text{für} \quad v_i \ll c$$

Typisch erreicht man ungefähr fünf Megavolt pro Meter. Das sind sehr lange Strecken, wenn man TeV erreichen will. Also weicht man auf Kreisbahnen aus.

- Das **Zyklotron** ist im wesentlichen eine Anordnung aus zwei Halbkreisscheiben. Durch ein senkrecht zur Bewegung gerichtetes Magnetfeld wird das Teilchen auf einer Spiralbahn gehalten. Beschleunigt wird das Teilchen durch ein elektrisches Feld einer Wechselspannung. Jetzt hängt die Frequenz von der Geschwindigkeit ab: (Dies technisch zu realisieren, ist meist sehr schwierig.)



Zyklotron

$$\nu_{\text{HF}}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{Q_e}{\gamma \cdot m} \cdot B$$

- Im **Synchrotron** ist stattdessen das Magnetfeld zeitveränderlich, um die Teilchen auf der Kreisbahn zu halten ($p(t) = e \cdot r \cdot B(t)$). Die Beschleunigung erfolgt durch Wechselfelder in Hohlraumresonatoren („Kavitäten“) mit einer konstanten Frequenz ν_{HF}.

  Das Synchrotron dient als Beschleunigerring sowie als Speicherring und zudem als Collider. Das Größte derzeitige Zyklotron ist CERN mit 27 km Durchmesser.

- Weitere Beschleuniger sind Betatron (Anpassung des Magnetfeldes) und Microtron (Anpassung der Länge).

3.4 Elastische Lepton-Nukleon-Streuung

Elastische Streuung
Streuvorgang, bei dem sich die Teilchen nicht ändern:

$$A(p_A^\mu) + B(p_B^\mu) \rightarrow A(p_A^{\mu\prime}) + B(p_B^{\mu\prime})$$

Inelastische Streuung
Streuvorgang mit Änderung der Teilchen: $A + B \rightarrow X \neq A + B$

Ein wichtiges Beispiel ist die Elektron-Positron-Streuung:

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$$

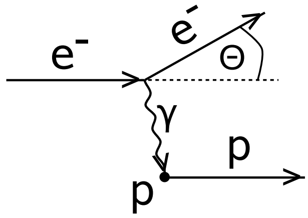
Manchmal werden Teilchen mit einem Teil der Stoßenergie angeregt, um dann andere Teilchen zu generieren, zum Beispiel:

$$\pi + p^+ \to \pi + (p^+)^* \to \pi + p^+ + \gamma$$

Lepton Elementarteilchen mit halbzahligem Spin $s = 1/2$, die nicht von starker Wechselwirkung erfasst sind (Elektron, Myon, Tauon, deren Neutrinos)

Nukleon in Atomkernen vorkommendes Elementarteilchen (Proton oder Neutron)

1964 haben Gell-Mann und Zweig die Hypothese aufgestellt, dass Nukleonen aus drei Quarks bestehen. Diese Behauptung wurde 1969 von Fridmau, Keudau und Taylor durch Experimente am SLAC bestätigt. Bei der Streuung von Elektronen en einem Target wird das Elektron unter dem Einfluss der elektromagnetischen Wechselwirkung abgelenkt, die Impulserhaltung ist durch ein emittiertes Photon sichergestellt. Dieses Photon fungiert als Austauschteilchen, sein Impuls geht über in das Nukleon, welches dadurch aus seiner Ruhelage abgelenkt wird.



Elektron-Proton-Streuung

3.4.1 Punktförmiges Target

Man untersucht die Viererimpulse $p^\mu = (E, \vec{p})$ und $p'^\mu = (E', \vec{p}')$ des Elektrons sowie $P^\mu = (M, 0)$ und P'^μ des Protons, welches zu Beginn ruht. Das Photon hat einen Viererimpuls q^μ. Die Impulserhaltung ergibt:

$$q^\mu = p^\mu - p'^\mu \quad \text{und} \quad P'^\mu = P^\mu + q^\mu$$

Das Elektron wird unter dem Winkel Θ gestreut. Die charakteristische Größe der Streuung ist der **Impulsübertrag**:

$$q^2 := q^\mu q_\mu = \nu^2 - \vec{q}^2 = -4E \cdot E' \cdot \sin^2 \Theta/2 < 0$$

Darin enthalten ist der Anteil hieran, der durch magnetische Wechselwirkung zustande kommt:

$$\tau = -\frac{q^2}{4M^2}$$

Man beachte, dass beide Größen vom Bezugssystem unabhängig sind.

Bemerkung

In der Literatur wird oft $Q^2 := -q^2$ definiert, um mit positiven Größen arbeiten zu können. Wir verwenden dieses Symbol nicht, zumal Q bereits für die elektrische Ladung benutzt wird.

Wir vergleichen die möglichen Streuungsarten:

- **Rutherford-Streuung**: Spin-0-Projektil, kann klassisch beschrieben werden:

$$b = \alpha \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{2E} \cdot \cot \frac{\Theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \cdot \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\Theta} = \left(\alpha \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{2E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}$$

  Diese Gleichung gilt nur im rückstoßfreiem Fall, also $P' \approx P$.

- **Mott-Streuung**: Streuung eines Elektrons an einem Spin-1/2-Target (außer Elektron und Positron); Beschreibung benötigt Korrekturterme:

– Spin-Terme und Rückstoß-Terme:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(2\alpha \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot E'\right)^2 \cdot \frac{E'}{q^4 \cdot E} \cdot \left(\cos^2 \Theta/2 + 2\tau \cdot \sin^2 \Theta/2\right)$$

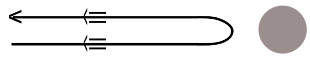
– Der $1/q^4$-Term enthält $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \sim \sin^{-4}(\Theta/2)$. E'/E beschreibt den „Phasenraum“ bei einem Rückstoß.

– Ist $E' = 0$, so folgt aus $|\vec{p}| = 0$, dass das Phasenraumvolumen verschwindet. Weiterhin gilt:

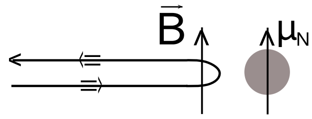
$$E = E' \cdot \left(1 + \frac{2E}{M} \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right)$$

Ein Prozess wird also rückstoßfrei, indem man entweder den Streuwinkel oder die Ausgangsenergie sehr klein macht, denn dann ist $E \approx E'$.

– Der Anteil $\cos^2 \Theta/2$ ist eigentlich $(1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \Theta/2)$ für $\beta \to 1$. Die Drehimpulserhaltung besagt, dass der Spin vorher und nachher gleichgerichtet ist. Die Helizitätserhaltung würde allerdings das Gegenteil verlangen, wenn der Winkel $180°$ ist. Das funktioniert nur, wenn man die magnetische Wechselwirkung des Spins das Targets beachtet. Der Anteil der magnetischen Wechselwirkung ist proportional zu $(\mu_N \cdot B)^2$, aber auch proportional zu $(e^2/M^2) \cdot q^2 \approx \tau$.



Drehimpulserhaltung



Helizitätserhaltung

- **Moller-Streuung**: Streuung eines Elektrons an einem Elektron
- **Bhabha-Streuung**: Streuung eines Elektrons an einem Positron

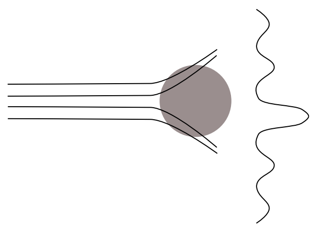
3.4.2 Nicht punktförmiges Target

Unsere Struktur besteht aus einer Ladungsverteilung mit der kugelsymmetrischen Ladungsdichte:

$$\varrho(\vec{r}) = Q \cdot e \cdot f(|\vec{r}|)$$

Der Wirkungsquerschnitt wird modifiziert zu:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left|F(q^2)\right|^2$$



Streuung an nicht punktförmigem Target

$F(q^2)$ ist der Formfaktor mit

$$F(q^2) = \int f(r) \cdot \mathrm{e}^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \, \mathrm{d}^2 r$$

Diese Definition ist auch im relativistischen Kontext gerechtfertigt, da bei kleinen Geschwindigkeiten $q^2 \approx |\vec{q}|^2$ ist.

Die Mottstreuung bracht einen elektrischen Formfaktor $G_E(q^2)$ mit $G_E(q^2 = 0) = 1$ und einen magnetischen Formfaktor $G_M(q^2)$ mit $G_M(q^2 = 0) = g/2$. Hierbei ist g definiert durch

$$\vec{\mu}_s = \frac{g}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \vec{s}$$

Für punktförmige Teilchen ist $g = 2$. Für die Mottstreuung folgt unter Beachtung der Formfaktoren:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = (2\alpha \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot E')^2 \cdot \frac{1}{q^4} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \cos^2 \Theta/2 \cdot \left[\frac{G_E(q^2)+\tau \cdot G_M(q^2)}{1+\tau} + 2\tau \cdot G_M(q^2) \cdot \tan^2 \frac{\Theta}{2}\right]}$$

Rosenbluth-Formel

Nimmt man alles vor der eckigen Klammer als $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_0$ und trägt $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)/(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_0$ über $\tan^2(\Theta/2)$ auf, so erhält man eine Gerade.

Bereits 1956 hatte Hofstadter festgestellt, dass das Proton nicht punktförmig ist, denn es ist $G_M^p(q^2 = 0) = g_p/2 = 2{,}79 \neq 1$. Für das Neutron ist zudem $G_M^n(0) = g_n/2 = -1{,}91 \neq 0$, das heißt: Das Neutron ist zwar nach außen hin elektrisch neutral, enthält aber mehrere elektrische Ladungen, welche das magnetische Moment erzeugen.

Für das Proton ergibt sich ein Dipol-Formfaktor, was auf eine exponentiell abfallende Ladungsverteilung schließen lässt:

$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{g_p/2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{|q^2|}{0{,}71\,\mathrm{GeV}^2}\right)^2} \qquad \text{und} \qquad \varrho(r) = \varrho_0(r) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{r}{0{,}23\,\mathrm{fm}}}$$

3.5 Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung

In den 1950ern hatte man eine große Menge von Elementarteilchen angehäuft (insb. Mesonen wie π, k, η, η', ω und ϱ und Bosonen wie p, n, Λ, ε^0 und $\varepsilon^\pm$), wusste aber noch nicht, dass die meisten davon aus Quarks bestehen.

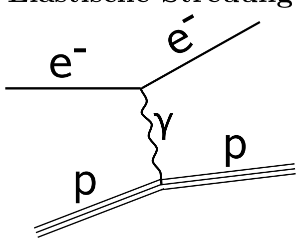
Meson Elementarteilchen, bestehend aus einem Quark und einem Antiquark

Baryon Elementarteilchen, bestehend aus drei Quarks oder drei Antiquarks

Bis auf das Proton sind alle instabil. Die Masse ist nur auf $\pm\Gamma = 1/\tau$ bestimmt, wobei τ die Lebensdauer des Teilchens ist. Das heißt, die Masse lässt sich nicht beliebig genau messen, da die Teilchen zerfallen.

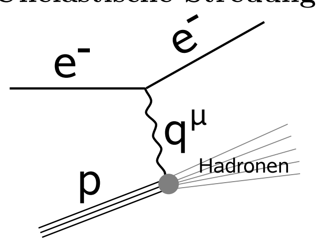
Bei der unelastischen Streuung kombinieren die Quarks des Nukleons zu einem Hadronensystem.

Elastische Streuung



$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left[A(q^2) + B(q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]$$

Unelastische Streuung



$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}} \cdot \left[\frac{1}{\nu} \cdot F_2(x, q^2) + \frac{2}{M} \cdot F_1(x, q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]$$

Die invariante Masse des bei der inelastischen Streuung entstehenden hadronischen Systems ist:

$$W^2 = P'^\mu P'_\mu =: P^2 = (P + q)^2 = P^2 + q^2 + 2P \cdot q$$

Die Größen p, p', P, P' und q sollen Vierervektoren sein. (Also ist $P \cdot q$ zum Beispiel eine Kurzschreibweise für $P^\mu \cdot q_\mu$. Wenn nur der Dreiervektor des entsprechenden Impulses verwendet wird, wird dies durch einen Vektorpfeil gekennzeichnet.) Die Koeffizienten $F_{1,2}$ im Wirkungsquerschnitt enthalten neben q^2 nun noch eine andere Abhängigkeit:

Bjorken'sche Skalenvariable

invariante Größe $x := -\frac{q^2}{2P\cdot q} \overset{\text{(Labor)}}{=} -\frac{q^2}{2M\cdot\nu}$ mit $0 \leq x \leq 1$

Damit lässt sich W neu schreiben:

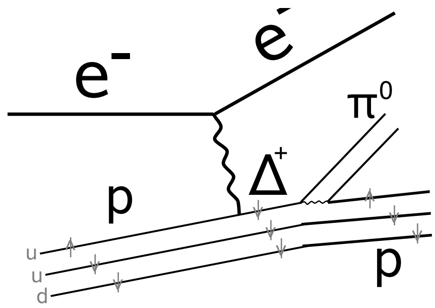
$$\boxed{W^2 = M^2 + q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

Im Fall elastischer Streuung ist $W = M$ (somit $x = 1$), da das entstehende Hadronensystem wieder das Proton mit der Masse M ist. Bei inelastischer Streuung ist $W > M$ (somit $x < 1$), denn die Photonenenergie geht teilweise in Masseenergie über. Da die Photonenfrequenz über

$$\nu = -\frac{q^2}{2M\cdot x}$$

gegeben ist und im elastischen Fall $x = 1$ fest ist, muss die Frequenz ν eindeutig sein. Bei unelastischer Streuung ist dies nicht mehr der Fall. Daher resultiert auch die Abhängigkeit der $F_{1,2}$ im Wirkungsquerschnitt von der Skalenvariable x.

Messungen zeigen Strukturen in $\mathrm{d}\sigma/(\mathrm{d}\Omega\cdot\mathrm{d}E)(W)$, sogenannte **Resonanzen**. Dies folgt aus dem Quarkmodell: Es muss natürlich der Spin erhalten bleiben; also kann zum Beispiel aus einem Proton ein Δ^+-Teilchen werden, welches anschließend in ein Proton und ein Π^0 zerfällt. Die Teilchen kann man als ebene Wellen betrachten:



$$|\psi\rangle = A\cdot \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t} = A\cdot \mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\cdot \mathrm{e}^{-iE\cdot t} = A\cdot \mathrm{e}^{-ip^\mu\cdot x_\mu}$$

Im Ruhesystem des Δ^+-Teilchens ist die Masse M_Δ eben die Energie, was wiederum der Kreisfrequenz ω entspricht. Genau wie in der Mechanik kann man nun erzwungene Schwingungen behandeln. Damit ist die Amplitude proportional zu:

$$A \sim \left|\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\cdot\omega_0}\right|^2 \sim \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2\cdot\omega_0^2}$$

Das teilchenphysikalische Analogon ist jetzt der Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma \sim \left|\frac{1}{(W^2 - M_\Delta^2) + i\Gamma_\Delta\cdot M_\Delta}\right| \sim \frac{1}{(W^2 - M_\Delta^2) + \Gamma_\Delta^2\cdot M_\Delta^2}$$

Bevor man die Theorie um die Quarks erweitert hat, hat man die Streuung als Δ-Resonanz bezeichnet. Heute erklärt man die Streuung mithilfe eines Δ-Baryons als Zwischenzustand mit einer Lebensdauer:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

Beispiel 3.3 zur Lebensdauer

Sei $\Gamma_\Delta = 0{,}2\,\mathrm{GeV}$. Anschaulich rechnet man das Ergebnis noch in die SI-Einheiten um.

$$\tau_\Delta = \frac{1}{0{,}12\,\mathrm{GeV}}\cdot\frac{0{,}2\,\mathrm{GeV}\cdot\mathrm{fm}}{3\cdot10^{23}\,\mathrm{fm/s}} = 0{,}6\cdot10^{-23}\,\mathrm{s}$$

Eine weitere wichtige Bedeutung von x liegt im **Infinite-Momentum-Bezugssystem**: In diesem System bewegt sich das Proton mit großem Impuls, sodass alle transversalen Impulse, insbesondere auch die Bewegungen der Quarks im Proton, vernachlässigt werden können. Hierbei ist x der Impulsanteil der Quarks („**Partonen**“) im Proton. Die unelastische Streuung am Proton ist dann eine elastische Streuung an einem der Partonen (Index P).

$$(P_P^\mu)^2 = \xi \cdot P^\mu \quad \text{und} \quad ({P'}_P^\mu)^2 + 2P_P \cdot q + q^2 \quad \text{mit} \quad P' = P + q$$

Umgestellt erhält man:

$$0 = 2P_P \cdot q + q^2 = 2\xi \cdot P \cdot q + q^2 \quad \Rightarrow \quad \xi = -\frac{q^2}{2P \cdot q} = x$$

Für die Auflösung solcher Streuprozesse gilt:

$$\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{|q^2|}} = \frac{1}{|q|}$$

Man braucht also wiederum hohe Energien, um kleine Strukturen aufzulösen. Bei der Rutherford-Streuung (1911) wurde das Proton noch als Punktmasse aufgelöst, Hofstadter konnte 1956 mit elastischer Streuung eine Ausdehnung feststellen. In den 60er-Jahren konnte man mit inelastischen Streuprozessen das Proton (Spin $s = 1/2$) in ein Δ^+-Teilchen (Spin $s = 3/2$) verwandeln, wobei sich der Spin des Elektrons umkehrt. Durch tief unelastische Streuung bewiesen Feynman, Bjorken, Friedman, Kendau und Taylor um 1970 die Beschreibung des Protons als Konglomerat aus drei Quarks.

Für die beschleunigte inelastische Streuung ist der Formfaktor von x und q^2 abhängig, wobei $x = -q^2/2Pq$ ist. Wenn P_t klein ist, ist x der Impulsanteil der Partonen.

Bei der elastischen Streuuung hängt der Formfaktor nur von q^2 ab:

$$F_{\text{Dipol}}(q^2) = \frac{1}{\left(1 + |q|^2 / 0{,}7\,\text{GeV}\right)^2} \sim \frac{1}{q^4}$$

3.5.1 Skalenverhalten und Partonen

Sei M die typische beteiligte Masse, eine charakteristische Größe des Experimentes. Bjorken sagte voraus, dass im Falle $|q|^2 \gg M$ der Formfaktor von q^2 unabhängig wird, also $F(x, q^2) \to F(x)$. Man fand aber, dass dieses **Skaling** schon bei geringeren Massen auftritt, also bei $|q|^2 \approx M$. Folglich müssen die beteiligten Massen $m \ll M$ sehr klein sein, denn dann ist $\left|F(q^2)\right| = \text{const.}$, der Formfaktor ist also kugelsymmetrisch. Er sagt somit punktförmige Objekte voraus, die zunächst nur als Partonen bezeichnet wurden.

3.5.2 Partonen-Dichtefunktionen

Man weiß, dass die Streuung durch die elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt wird. Den Formfaktor F_2 erhält man durch Summation über alle Partonen i:

$$F_2(x) = \sum_i Q_i^2 \cdot x \cdot f_i(x)$$

Hierbei ist Q_i die Partonenladung und f_i beschreibt die Häufigkeit des Partons i mit dem Impuls $x \cdot P$. Diese Verteilung ist normiert:

$$\int_0^1 \sum_i x \cdot f_i(x) \mathrm{d}x = 1$$

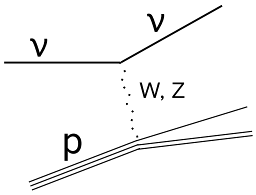
Somit ist der Protonenimpuls die Summe aller Partonenimpulse.

Beispiel 3.4

Wir nehmen an, dass das Proton zu zwei Dritteln aus up-Quarks und zu einem Drittel aus down-Quarks besteht.

$$F_2^p(x) = x \cdot \left[\frac{4}{9} \cdot f_n(x) + \frac{1}{9} \cdot f_d(x)\right]$$

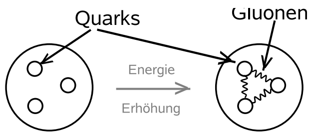
Nun kann man aber auch über die schwache Wechselwirkung streuen, also durch Austausch von w- bzw. z-Bosonen. Der Wechselwirkungspartner ist dann ein Neutrino. Die Theorie sagt voraus, dass der Formfaktor dieser Streuung um den Faktor 18/5 größer ist. Der experimentelle Nachweis dieses Verhältnisses ist ein wichtiger Teil der Argumentation, dass das Proton tatsächlich aus zwei up-Quarks und einem down-Quark besteht.



Neutrino-Streuung

Durch Erhöhung des Impulsübertrages q^2 könnte man im HERA-Experiment nachweisen, dass die Quarks ständig Gluonen austauschen. Dieser Nachweis gelang über die Überprüfung der Normierung, denn ohne Beachtung der Gluonen war:

$$\int_0^1 \sum_q x_q \cdot f_q(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}55$$



Protonenaufbau

Wenn man durch höheren Impulsübertrag noch genauer äuflöst, stellt man fest, dass ständig Paare aus Quarks und Antiquarks entstehen und verschwinden. Die ständig anwesenden Teilchen (u und d) nennt man **Valenz-Quarks**, die kurzzeitigen Teilchen heißen **See-Quarks**.

Durch den internen Aufbau hängt die Strukturfunktion doch wieder von q^2 ab. Nur für große x kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen.

4 Theorie der Teilchenphysik

4.1 Dirac-Gleichung

Wie bereits in der Quantentheorie besprochen, werden die für die Bewegungsgleichung relevanten Größen wie folgt quantisiert:

klassisch	**quantenmechanisch**
E	$\widehat{E} = i \cdot \frac{\partial}{\partial t}$
p	$\widehat{p} = i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$
p^μ	$\widehat{p}^\mu = i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) = i \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} =: i \cdot \partial^\mu$

Zur Herleitung der Schrödinger-Gleichung wird die klassische Energie-Impuls-Beziehung quantisiert:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = E \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2m} \cdot \nabla^2 \Psi(x,t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t)$$

In der relativistischen Mechanik erhält man analog aus $p^\mu \cdot p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ die folgende wichtige Gleichung:

$$\boxed{-\partial^\mu \partial_\mu \Psi(\vec{r},t) = m^2 \cdot \Psi(\vec{r},t)}$$

Klein-Gordon-Gleichung

Diese Gleichung wird auch heute noch für Bosonen verwendet. Dirac erkannte aber, dass die Klein-Gordon-Gleichung bei Fermionen fälschlicherweise auf negative Wahrscheinlichkeiten führt. Also Lösung des Problems versuchte es, die Gleichung $p^\mu \cdot p_\mu - m^2 = 0$ zu linearisieren. Der Ansatz lautet wie folgt:

$$(\gamma^\kappa \cdot p_\kappa - m) \cdot \left(\gamma^\lambda \cdot p_\lambda - m\right) \stackrel{!}{=} p^\mu \cdot p_\mu - m^2$$

Daraus folgen für den neuen Vierervektor γ die Bedingungen:

$$\gamma^\kappa \cdot \gamma^\lambda = -\gamma^\lambda \cdot \gamma^\kappa \text{ für } \lambda \neq \kappa \quad \text{und} \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$$

Dieses System wird nur durch **hyperkomplexe Zahlen** gelöst, deren einfachste Darstellung 4×4-Matrizen sind. Zur kompakten Schreibung nutzen wir die zweidimensionale Einheitsmatrix sowie die Pauli-Spinmatrizen:

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung für die Elemente von γ lautet nun wie folgt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Impuls ergibt sich dann:

$$\gamma^\kappa \cdot p^\kappa - m = 0$$

Die Quantisierung führt auf die **Dirac-Gleichung**:

$$\boxed{(i \cdot \gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0}$$

Dirac-Gleichung für Fermionen

Ψ muss also auch ein vierkomponentiges Objekt sein. Der erste Term ist (für $\mu = 0$):

$$\left[i \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0$$

Man beachte, dass die γ^μ keine Vierervektoren sind, da sie sich unter Lorentz-Transformation *nicht* verändern. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung Ψ hat vier Komponenten Ψ_1 bis Ψ_4; diese Indizes sind vier Freiheitsgrade, die nichts mit den Komponenten der Vierervektoren zu tun haben. Sie werden benötigt, weil Ψ auch eine 4×4-Matrix ist.

4.1.1 Lösung für ruhende Teilchen

Es ist also $\vec{p} = 0$. Laut der Quantisierungsvorschrift ist damit auch $\partial\Psi/\partial\vec{x} = 0$:

$$\partial_1\Psi = \partial_2\Psi = \partial_3\Psi = 0$$

Die Dirac-Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} i \cdot \gamma^0 \partial_0 \Psi &= m \cdot \Psi \\ i \cdot \tfrac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} &= m \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses System aus vier Differentialgleichungen liefert die folgenden vier Basislösungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-imt} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-imt} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{imt} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{imt}$$

Natürlich ist jede Linearkombination dieser Basislösungen auch eine Lösung. Da die Dirac-Gleichung nur für Fermionen gilt, ist $s_z = \pm 1/2$. Diese Spins kann man den Lösungen zuordnen, also zum Beispiel $s_z = 1/2$ zur ersten Lösung und $s_z = -1/2$ zur zweiten Lösung. Man sieht, dass man, um alle Lösungen voneinander unterscheiden zu können, eine weitere solche Größe finden muss. Hierzu ermitteln wir die Energieeigenwerte der Lösungen:

$$E \cdot \Psi = \widehat{E}\Psi = i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Für die ersten beiden Lösungen ergibt sich die Energie $E = +m$, für die anderen beiden $E = -m$. Da negative Energien unmöglich sind, nahm man zunächst an, dass diese Lösungen physikalisch unsinnig sind. Dirac erklärte 1928, dass diese Lösungen sehr voll physikalisch sind; sie beschreiben Antiteilchen mit umgekehrter Ladung. Nun kann man diesen Lösungen auch wieder Spins zuordnen. Insgesamt gehören zu den Lösungen also die folgenden Größen:

$$\begin{array}{rcccc} & \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{-imt} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{-imt} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{imt} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{imt} \\ \textbf{Spin} & s_z = \frac{1}{2} & s_z = -\frac{1}{2} & s_z = \frac{1}{2} & s_z = -\frac{1}{2} \\ \textbf{Energie} & E = m & E = m & E = -m & E = -m \end{array}$$

Die Diracsche Erklärung mithilfe des „Dirac-Sees“ ist heute überholt. Stattdessen nutzt man die Interpretation nach Feynman und Stürkelberg: Für negative Lösungen wird der Viererimpuls umdefiniert:

$$p^\mu_{\text{phys}} = -p^\mu_{\text{Dirac}}$$

Somit geht die Energie $E = -m < 0$ in $-E = m > 0$ und der Impuls von $\vec{p}$ zu $-\vec{p}$ über. Damit kehrt sich auch die Zeit um $(t \to -t)$, sodass auch Antiteilchen eine *positive Energie* haben und sich in der Zeit *vorwärts* bewegen.

4.2 Allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung

Die Lösungen der Dirac-Gleichung sind Eigenzustände des **Helizitätsoperators** $\widehat{h}$, dessen Eigenwerte die Ausrichtung von $\vec{s}$ bzgl. dem Impuls $\vec{p}$ angeben. Die Richtung von $\vec{p}$ wird dabei als Quantisierungsachse für den Spin gewählt, somit ist in dieser Richtung $s_p = \pm 1/2$:

$$h := \frac{\vec{p}\cdot\vec{s}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{s_p}{|s_p|} = \pm 1$$

Für die folgenden Ausführungen führen wir die folgenden Zweier-Spinoren als Abkürzungen ein:

$$\chi^{(1)} := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{für } n = +1 \quad \text{und} \quad \chi^{(2)} := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{für } n = -1$$

Ein freies Teilchen wird immer durch eine ebene Welle gelöst:

$$\mathrm{e}^{-i\cdot p_\mu\cdot x^\mu} = \mathrm{e}^{i\cdot(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\cdot t)}$$

Allgemein ergeben sich die Lösungen damit wie folgt:

$$\begin{array}{cc} \text{Teilchen} & \text{Antiteilchen} \\ \Psi(x^\mu, p_\mu) = u(p_\mu)\cdot \mathrm{e}^{-ip_\mu\cdot x^\mu} & \Psi(x^\mu, p_\mu) = v(p_\mu)\cdot \mathrm{e}^{+ip_\mu\cdot x^\mu} \end{array}$$

Hierbei sind u und v der Teilchen- und der Antiteilchen-Spinor, die jeweils Viererspinoren sind.

$$u_{1,2} = \sqrt{E+m}\cdot\begin{pmatrix}\chi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\cdot\chi^{(1,2)}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_{1,2} = \sqrt{E+m}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\cdot\chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)}\end{pmatrix}$$

Hierbei ist $\vec{\sigma}$ eine Kurzschreibweise für alle Pauli-Spinmatrizen:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Beispiel 4.1 Ruhendes Teilchen

Wir wollen diese allgemeine Lösung mit den oben gefunden Basislösungen vergleichen. Dazu setzen wir $\beta \to 0$, $\vec{p} \to 0$ und $E \approx m$:

$$u_1 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \sqrt{2E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.2 Masseloses Teilchen

In diesem Fall geht $\beta \to 1$, der Impuls ist $\vec{p} = (0, 0, p)$ und die Energie $E \gg m$ sehr groß. Die Nebenrechung ergibt zunächst:

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} = \frac{p}{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Lösung:

$$u_1 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \sqrt{E} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass hier (wie im Allgemeinen immer) die Komponenten dieses Vektors nicht klar zu Teilchen und Antiteilchen zugeordnet werden können. Weiterhin ist zu beachten, dass u_1 und v_1 zu voneinander unabhängigen Lösungen gehören, da die Exponentialfunktionen der Gesamtlösung verschiedene Vorzeichen haben.

Weiterhin charakterisieren $\begin{pmatrix} \updownarrow \\ \updownarrow \end{pmatrix}$ die Helizität.

adjungierter Spinor

$$\overline{u} = u^\dagger \cdot \gamma^0 \text{ (nicht verwechseln mit Überstrich-Notation für Antiteilchen)}$$

Damit ist $j^\mu = \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \Psi$ ein Vierervektor, die sogenannte **Viererstromdichte** $j^\mu = (\varrho, \vec{\jmath})$. Die Helizität ist hingegeben bezugssystemabhängig. Wenn sich das Teilchen zum Beispiel mit $h = 1$ in x-Richtung bewegt und man das System so transformiert, dass es sich im neuen System in $-x$-Richtung bewegt (man „überholt“ es sozusagen), dann ist der Spin immer noch in x-Richtung ausgerichtet, also wird $h = -1$. Um dieses Dilemma zu lösen, setzt man

$$\gamma^5 := i\gamma^0 \cdot \gamma^1 \cdot \gamma^2 \cdot \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhält eine neue, bezugssystemunabhängige Größe:

Chiralität positiv (also $+1$) im Falle $\gamma^5 \cdot u_R = u_R$, negativ (also -1) im Falle $\gamma^5 \cdot u_L = -u_L$

Die Chiralität hat kein eigenes Formelzeichen, man kennzeichnet sie wie oben durch Indizes L und R. Im Grenzfall großer Geschwindigkeiten ist die Chiralität identisch mit der Helizität h. Jeder Spinor lässt sich in Anteile positiver und negativer Chiralität aufteilen.

$$u_L := \frac{1}{2} \cdot (1 - \gamma^5)u \quad \text{und} \quad u_R := \frac{1}{2} \cdot (1 + \gamma^5)u$$

5 Elektromagnetische Wechselwirkung (Quantenelektrodynamik)

Die Dirac-Gleichung kann man auch aus fundamentaleren Prinzipien herleiten. Wir werden sehen, dass in Analogie zur klassischen Live-CD auch eine Lagrange-Dichte existiert, die durch fundamentale Symmetrien begründet ist und die Existenz elementarer Wechselwirkungen benötigt.

5.1 Lagrangedichte

Klassisch setzt sich die Lagragefunktion aus kinetischer und potentieller Energie zusammen und hängt von den Orts- und Geschwindigkeitskomponenten r_i und $\dot{r}_i$ ab:

$$L(r_i, \dot{r}_i, t) = T - V$$

In der Quantentheorie führt man die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ pro Volumen so ein, dass $L = \int \mathcal{L}\ \mathrm{d}^3 r$ ist.

$$\mathcal{L}(\phi_i(\vec{r}, t), \partial_\mu \phi_i(\vec{r}, t)) = \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

Die Herleitung der Lagrange-Gleichungen über Variation der Konstanten überträgt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

Beispiel 5.1

Sei $\mathcal{L}_0$ die Lagrangefunktion mit:

$$\mathcal{L}_0 = i \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \partial_\mu \Psi - m \cdot \overline{\Psi}\Psi$$

Hierbei ist entweder $\phi_i = \psi$ oder $\phi_i = \overline{\psi}$; diese beiden Fälle können als unabhängig aufgefasst werden, weil die Lösungen komplexwertig sind. (Somit ergeben sich in der Lösung acht Parameter.)

$$0 - i \cdot \gamma^\mu \cdot \partial_\mu \Psi + m \cdot \Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad i\gamma^\mu \cdot \partial_\mu \Psi - m \cdot \Psi = 0$$

Das ist die bekannte Dirac-Gleichung. Der andere Fall ergibt die **adjungierte Dirac-Gleichung**:

$$\partial_\mu(i\overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu) + m \cdot \overline{\Psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\partial_\mu \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu + m \cdot \overline{\Psi} = 0$$

Diese Gleichung wird nicht weiter verwendet, da sie keine neuen Lösungen bringt.

Addiert man die Dirac- und die adjungierte Dirac-Gleichung, so erhält man:

$$\begin{array}{rrcl} & \Psi \cdot i \cdot \gamma^\mu \cdot \partial_\mu \Psi - m\overline{\Psi}\Psi & = & 0 \\ + & i \cdot \partial_\mu \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \Psi + m \cdot \overline{\Psi}\Psi & = & 0 \\ \hline & i \cdot \partial_\mu(\overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \Psi) & = & 0 \end{array}$$

Hieraus folgt sofort die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

5.2 Eichsymmetrien

5.2.1 Globale Eichsymmetrien

Die Quantenelektrodynamik basiert auf einer **Eichsymmetrie|textbf** der Phase:

$$\Psi \to \Psi' = \mathrm{e}^{i\Theta\cdot\widehat{Q}} \cdot \Psi \quad \text{mit} \quad \widehat{Q}\Psi = Q\Psi$$

Ensprechend findet man $\overline{\Psi}$:

$$\overline{\Psi} \to \overline{\Psi}' = \mathrm{e}^{-i\Theta\cdot\widehat{Q}} \cdot \overline{\Psi}$$

Das Θ ist ein beliebiger, aber konstanter Faktor. In dieser Eichung folgt die Symmetrie $\mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0$, dass heißt, die Ladung Q bleibt erhalten.

5.2.2 Lokale Eichsymmetrien

Wir behaupten: Die Natur „will", dass $\mathcal{L}_0$ auch unter *lokalen* Umeichungen unverändert bleibt.

$$\Psi \to \Psi' = \mathrm{e}^{i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}} \cdot \Psi \quad \text{und} \quad \overline{\Psi} \to \overline{\Psi}' = \mathrm{e}^{-i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}} \cdot \overline{\Psi}$$

Θ ist eine beliebige Funktion von x_μ. Damit ist:

$$\mathcal{L}' = i \cdot \mathrm{e}^{-i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}} \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \underbrace{\partial_\mu \left(\mathrm{e}^{i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}}\Psi\right)}_{=i\widehat{Q}\cdot(\partial_\mu\Theta)\cdot\mathrm{e}^{i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}}\cdot\Psi+\mathrm{e}^{i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}}\cdot\partial_\mu\Psi} - m \cdot \mathrm{e}^{-i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}} \cdot \overline{\Psi} \cdot \mathrm{e}^{i\Theta(x_\mu)\cdot\widehat{Q}} \cdot \Psi \neq \mathcal{L}$$

Daraus sieht man, dass man ein zusätzliches Feld A_μ benötigt, dass sich wie folgt transformiert:

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu - \frac{1}{e} \cdot \partial_\mu\Theta(x_\mu)$$

Weiterhin führt man eine transformierte Ableitung ein:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + i \cdot e \cdot \widehat{Q} \cdot A_\mu$$

e ist der einzige freie Parameter. Im Falle der **elektromagnetischen Kopplungsstärke** ist $e = 0{,}3$. Damit erhält man die neue Wechselwirkungs-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{interaction}} = i\overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \Psi - Qe \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu A_\mu \cdot \Psi - m \cdot \overline{\Psi} \cdot \Psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}'_{\text{interaction}} = \mathcal{L}_{\text{interaction}}$$

Die vollständige Lagrangedichte der QED erhält man aus allen Termen, die $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ erfüllen:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu\partial_\mu \cdot \Psi - m \cdot \overline{\Psi} \cdot \Psi - Qe \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot A_\mu \cdot \Psi - \frac{1}{4} \cdot F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

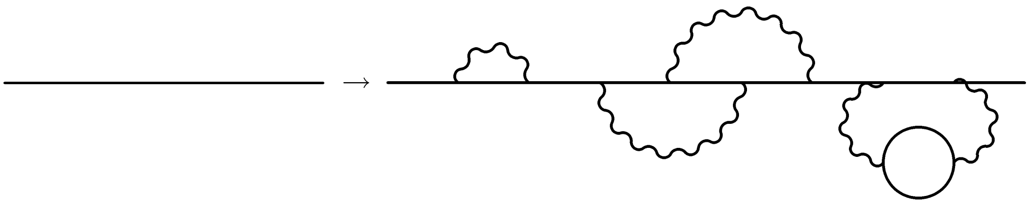
Hierbei ist $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ der **Feldstärketensor**. Die Euler-Lagrange-Gleichungen werden nun mit $\Phi_i = A_\mu$ hergeleitet. Die Lösung enthält die **Ladungsstromdichte**:

$$J^\mu = Qe \cdot j^\mu = Qe \cdot \overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu \cdot \Psi$$

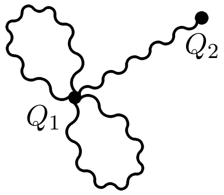
Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben dann die **Maxwell-Gleichungen**:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu}$$

Damit ergibt sich auch die Bedeutung des Feldes A^μ als **Photonenfeld**.



Die Betrachtung lokaler Eichsymmetrien führt auf ein neues Bild von Teilchen: Elementarteilchen sind ständig von einer Wolke aus **Eichbosonen** umgeben. Jedes dieser Eichbosonen transportiert einen bestimmten Phasenanteil. Durch Erzeugung und Vernichtung von Photonen bleibt die Phase des Teilchens vom jeweiligen Bezugssystem unabhängig (d.h. die Struktur der Eichbosonenwolke ist stark bezugssystemabhängig).



Kraftwirkungen entstehen durch den Austausch von Eichbosonen, die dann als **Wechselwirkungsteilchen** bezeichnet werden. Dadurch ist zum Beispiel die Coulomb-Kraft proportional zur Wahrscheinlichkeit, dass Eichbosonen (hier Photonen) erzeugt bzw. vernichtet werden, und zu der Dichte der Eichbosonen:

$$\begin{array}{ccccccc} F_C & \sim & P(\text{Emission}) & \cdot & P(\text{Absorption}) & \cdot & \text{Dichte der Photonen} \\ F_C & = & Q_1 e & \cdot & Q_2 e & \cdot & \frac{1}{4\pi\cdot r^2} \end{array}$$

Wie man sieht, ist die Abhängigkeit $F_C \sim 1/r^2$ eine rein geometrische Ursache hat, nämlich die Dimensionalität des Raumes.

Bemerkung

Es gibt Spekulationen über winzige zusätzliche „Extradimensionen“, in die nur die Gravitation kommt. Es ergeben sich neue Gravitationsgleichungen für die Fälle:

- große Abstände $> R_{\text{extra}}$ (dreidimensional)

$$F_N(r) = \frac{1}{M_p^2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- kleine Abstände $< R_{\text{extra}}$

$$F'_N(r) = \frac{1}{{M'_p}^{2+n}} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^{2+n}}$$

Einfach ausgedrückt verteilt sich die Gravitationskraft also auf mehrere Dimension und wirkt damit in den einzelnen Dimensionen (insb. den normalen Raumdimensionen) schwächer. Das könnte erklären, warum die Gravitation im Vergleich zu anderen Wechselwirkungen auf kurzen Abständen so schwach ist.

$$F_N(R_{\text{extra}}) = F'_N(R_{\text{extra}})$$

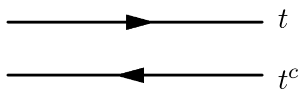
Zusammenfassung

Jede Eichsymmetrie wird durch n Generatoren T_n erzeugt, zum Beispiel schwache Eichsymmetrie durch $1/2\tau_i := 1/2\sigma_i$. Die Ladungen dieser Symmetrien sind die Eigenwerte der Generatoren, zum Beispiel:

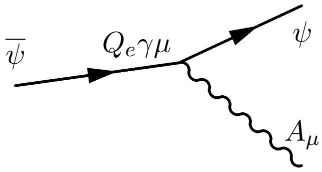
$$I_3^W(e^-) = -\frac{1}{2} \quad \text{wegen} \quad \frac{1}{2}\tau_3 e^- = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_e \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot e^-$$

Die freie Lagrangedichte ist nicht invariant unter *lokalen* Eichtransformationen. Die Invarianz erzwingt die Einführung eines Wechselwirkungsterms mit einem Eichfeld $V_{a\mu}$ für jede Eichsymmetrie ($G_{a\mu}$, $W_{a\mu}$, A_μ). Einfaches Rezept für die Herleitung des Wechselwirkungsterms: Ersetze ∂_μ durch $D_\mu = \partial_\mu + ig \cdot \sum T_a \cdot V_{a\mu}$.

5.3 Fundamentale Vertices und Prozesse der Quantenelektrodynamik

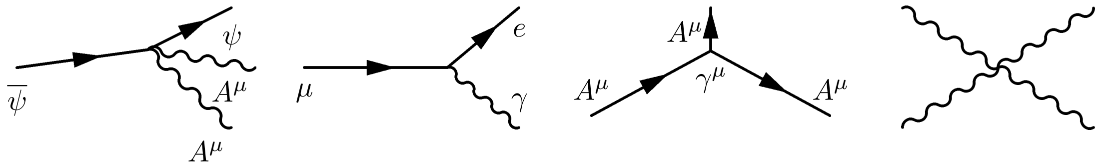
Freies Teilchen	**Freies Photon**
Darstellung von Teilchen und Antiteilchen durch Pfeilrichtungen 	

Eine Reaktion stellt sich dann wie folgt dar:

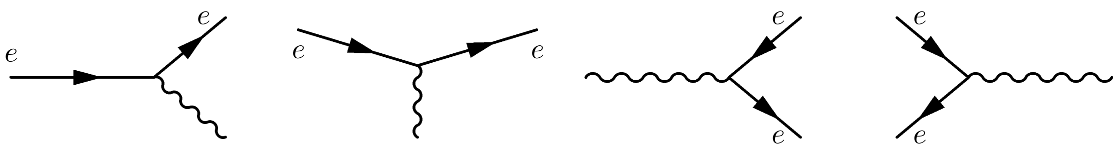


Jedes Teilchen koppelt mit der Stärke Q_e am Photon A_μ. Die Lorentzstruktur der Kopplung ist γ^μ für die QED. Damit bleibt die Chiralität erhalten.

Die folgenden Prozesse sind deswegen nicht erlaubt:



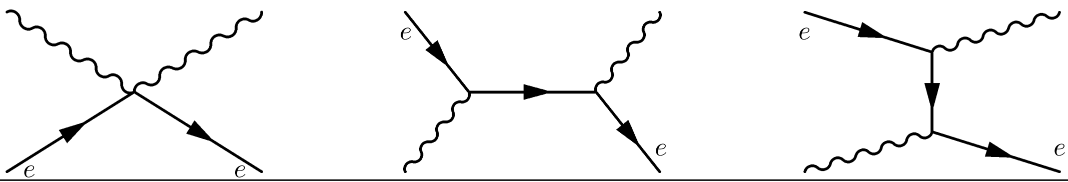
Alle Feynman-Diagramme erhält man aus beliebigem Drehen und Kombinieren erlaubter Vertices, zum Beispiel:



Ob man ein Teilchen oder ein Antiteilchen hat, ergibt sich aus der Richtung des Pfeils relativ zur horizontalen Zeitachse.

Beispiel 5.2 Compton-Streuung

Naiv würde man für Compton-Streuung das linke Diagramm annehmen. Dieser Prozess ist aber verboten, tatsächlich muss der Prozess wie im mittleren oder rechten Bild dargestellt aus zwei der obigen Vertices kombiniert werden.



5.4 Feynman-Diagramme

Die Feynman-Diagramme erfüllen zwei Funktionen:

- Aufbau der möglichen Prozesse über die erlaubten Vertices
- Berechnung der quantenmechanischen Amplitude für Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten

5.4.1 Born-Diagramme niedrigster Ordnung

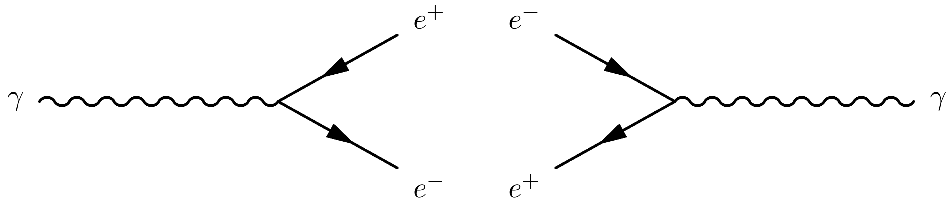
Lowest Order
kleinste Anzahl von Vertices für einen gegebenen Prozess

Es gibt ein paar Regeln:

1. Alle erlaubten Vertices sind kombinierbar.
2. An allen Vertices gilt die Impuls-, Energie-, Drehimpuls- und Ladungserhlatung.
3. Ein Vertex wird charakteriert durch ein Produkt, zum Beispiel in der QED $Qe\gamma^\mu$ mit der Ladung Q, dem Kopplungsfaktor e und der Lorentz-Struktur (Winkelverteilung) γ^μ.
4. Teilchen werden als Linien darsgestellt: $\longrightarrow e^-$

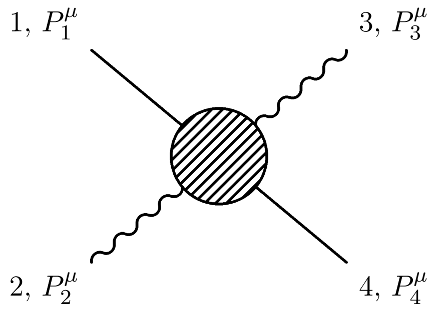
   Antiteilchen tragen entgegengesetzte Pfeile: $\longleftarrow e^+, \nu^C, q^C$ (kein Überstrich wegen Verwechselungsgefahr mit dem adjungierten Spinor)
5. Äußere Linien stehen für physikalische Teilchen mit $p^2 = m^2$ (physikalische Masse).
6. Innere Linien stehen für virtuelle Teilchen mit beliebigen $p^2 \neq m^2$.

Aus 2. und 4. folgt, dass die meisten Vertices alleinstehend nicht möglich sind, z.B. die inelastische Streuung eines Elektrons ohne Streupartner:



Man muss Vertices also zwangsläufig kombinieren, um zum Beispiel Prozesse mit zwei Anfangs- und zwei Endteilchen zu haben. Bei der Paarvernichtung $e^+e^- \to \gamma\gamma$ wird eines der Elektronen zunächst inelastisch gestreut (wobei das erste Photon entsteht), bevor beide Elektronen zu einem Photon annihilieren. Man sieht, dass es für die Regeln des Feynman-Diagrammes unerheblich ist, welches der beiden Teilchen gestreut wird. Man nutzt also die bzgl. dieses Aspektes agnostische Version, bei der das gestreute Teilchen senkrecht läuft.

5.4.2 Mandelstam-Variable



Per Konvention seien $(1, 3)$ und $(2, 4)$ Paare gleicher Teilchen. Für die Impulse gilt offensichtlich:

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu$$

Der Prozess wird durch die folgenden **Mandelstam-Variablen** beschrieben:

$$\begin{aligned} s &:= (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2 \\ t &:= (P_1 - P_3)^2 = (P_2 - P_4)^2 \\ u &:= (P_1 - P_4)^2 = (P_3 - P_2)^2 \end{aligned}$$

Für die Mandelstam-Variablen gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & s & = & E_{CM}^2 \\ & s + t + u & = & m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \\ m \ll E & \Rightarrow \quad t & = & -\frac{5}{2} \cdot (1 - \cos\Theta^*) \\ m \ll E & \Rightarrow \quad u & = & -\frac{5}{2} \cdot (1 + \cos\Theta^*) \end{array}$$

Hierbei ist Θ^* der Streuwinkel. Unter Vernachlässigung der Massen verschwindet die Summe der Mandelstam-Variablen folglich.

s/t/u-Kanal ein Feynman-Diagramm, für dessen innere Linien $q^2 = s, t, u$ gilt

5.4.3 Feynmanregeln und Übergangsamplitude

$$\boxed{\text{Rate} = 2\pi \cdot \langle |M| \rangle^2 \cdot \text{Phasenraum}}$$

Fermis Goldene Regel

Die Rate hängt also von der **Übergangsamplitude** $\langle |M| \rangle^2$ und der Größe des Phasenraums (auch: Dichte der Endzustände) ab. Die Übergangsamplitude muss über die einfallenden Spins gemittelt und über die Spins im Endzustand summiert werden.

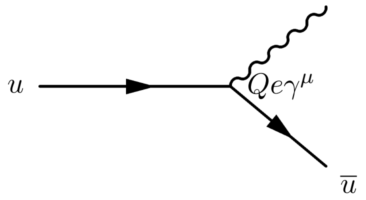
Die Anwendung dieses Konzeptes auf ein Feynman-Diagramm liefert die **Feynman-Amplitude** $\mathcal{M}$. Wir betrachten zunächst Zwei-nach-Zwei-Prozesse (z.B. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$) und Eins-nach-Zwei-Prozesse (z.B. $Z^0 \to \mu^+\mu^-$). Zudem gibt es noch die Eins-nach-Drei-Prozesse, wie der Zerfall eines Neutrons ($n \to p + e^- + \nu_e^c$). Der Wirkungsquerschnitt für die Zwei-nach-Zwei-Prozesse ergibt sich aus:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{\langle |\mathcal{M}| \rangle^2}{s} \cdot \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|}$$

Ein gesternter Impuls ist immer bzgl. des Schwerpunktsystemes gemessen. Die Größe des Phasenraumes ergibt sich wie folgt:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{\langle|\mathcal{M}|\rangle}{m} \cdot \frac{\left|\vec{p}_f^{\,*}\right|}{m/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\Gamma}{\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E_3} = \frac{1}{64\pi^3} \cdot \frac{\langle|\mathcal{M}|\rangle}{m} \cdot \frac{\left|\vec{p}_f^{\,*}\right|}{\left|\vec{p}_i^{\,*}\right|}$$

Zur Feynman-Amplitude $\mathcal{M}$ gelangt man entweder durch Erraten oder Ausrechnen. Wir beschränken uns auf die erstere Möglichkeit. Dazu müssen wir wissen, welche Spineinstellungen in der QED möglich sind.



Es ergibt sich unter Beachtung der verschiedenen Chiralitäten:

$$Qe \cdot \overline{u}\gamma^\mu u = Qe \cdot (\overline{u}_L + \overline{u}_R)\gamma^\mu(u_L + u_R)$$

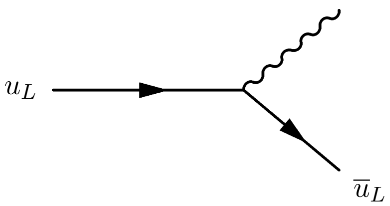
Dieser Ausdruck besteht aus vier Termen. Die Mischterme verschwinden aber wegen:

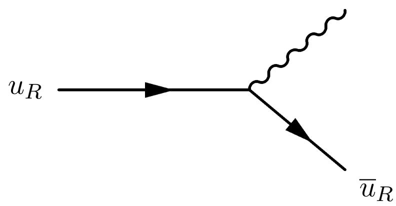
$$\overline{u}_R\gamma^\mu\overline{u}_L = \overline{u} \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \cdot \gamma^\mu \cdot \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u = 0$$

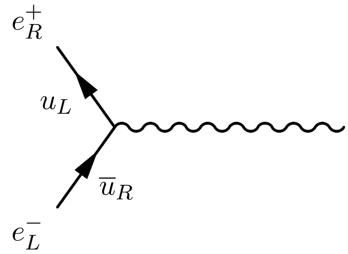
Es verbleibt:

$$Qe \cdot \overline{u}\gamma^\mu u = Qe \cdot (\overline{u}_L\gamma^\mu u_L + \overline{u}_R\gamma^\mu u_R)$$

Damit erkennt man, dass dieser Vertex die Chiralität des Teilchens nicht ändert.







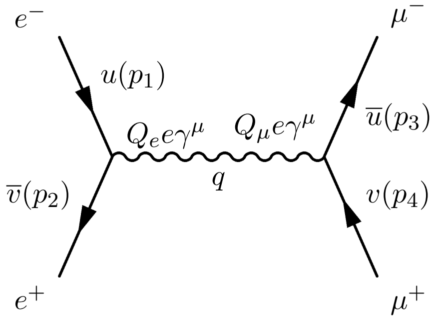
Die möglichen Spinzustände für die Reaktion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ sind damit: Im Laborsystem (d.h. dem Schwerpunktsystem) ist: Die Drehimpulseinstellungen sind dabei $\Theta^* = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$. Die Wahrscheinlichkeiten, dass Drehimpulserhaltung gilt, sind dann 100%, 50% und 0%. (Die Drehimpulse stehen in dem entsprechenden Winkel zueinander, da die Helizität erhalten bleibt. Ist der erste Drehimpuls die Quantisierungsachse, so sinkt mit größer werdendem Streuwinkel die Wahrscheinlichkeit, entlang dieser Quantisierungsachse denselben Drehimpuls zu messen.)

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos\Theta^*) = \frac{u}{s}$$

Damit ergibt sich die folgende Feynman-Amplitude:

$$\langle|\mathcal{M}|\rangle^2 = 2e^4 \cdot \left[\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] \cdot \underbrace{Q_e^2 \cdot Q_\mu^2}_{=1}$$

Die Herleitung des Vorfaktors „2“ ist kompliziert und bedarf aller Feynmanregeln.



Im Prinzip nutzt man die folgende Methode zur Bestimmung der Feynman-Amplitude: Man nimmt den Vorfaktor $(2\pi)^4$ fest an, und stellt dann in einem Integral charakteristische Terme für die einzelnen Elemente des Feynman-Diagrammes zusammen. Für ein Fermion nimmt man alle Terme $u(p)$ und Kopplungsfaktoren $Qe\gamma^\mu$ mit (entgegen der Pfeilrichtung). Ein internes Photon fügt den Term $-ig_{\mu\nu}/q^2$. Die Gesamtheit aller Terme integriert man über q, wobei immer die Impulserhaltung gelten muss, in diesem Falle also $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 =: q$.

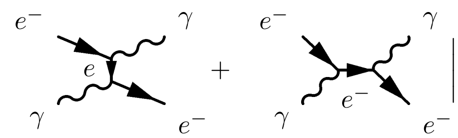
$$\mathcal{M} = (2\pi)^4 \cdot \int [\overline{v}(p_2) \cdot i \cdot Q_e e\gamma^\mu \cdot u(p_1)] \cdot \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right] \cdot [\overline{u}(p_3) \cdot i \cdot Q_\mu e\gamma^\mu \cdot v(p_4)] \cdot \delta^4(p_1+p_2-q) \cdot \delta^4(p_3+p_4-q)\, \mathrm{d}^4 q$$

Merke:

- Jeder Vertex liefert einen Faktor $Q_f e$. Somit ist $\sigma \sim \alpha_{em}^n$ mit der Zahl n der Vertices, denn es ist $\alpha_{em} = e^2/4\pi$.
- Innere Linien werden durch sogenannte **Propagatoren** repräsentiert, die alle mit $\left[q^2 - m^2(+i\varepsilon)\right]^{-1}$ gehen. Somit ist die Prozesskinematik stark bevorzugt (d.h. er tritt besonders häufig auf), wenn $q^2 = m^2$ ist (Resonanz).
- Die Kanale zeigen auch Resonanzerscheinungen:
  - Der s-Kanal wird groß, wenn $q^2 = m^2$ ist.
  - Der u-Kanal wird für Photonen groß, wenn $u = 0$ und somit $\Theta^* = 180^\circ$ ist.
  - Der t-Kanal wird für Photonen groß, wenn $t = 0$ und somit $\Theta^* = 0^\circ$ ist.

Beispiel 5.3 Compton-Streuung

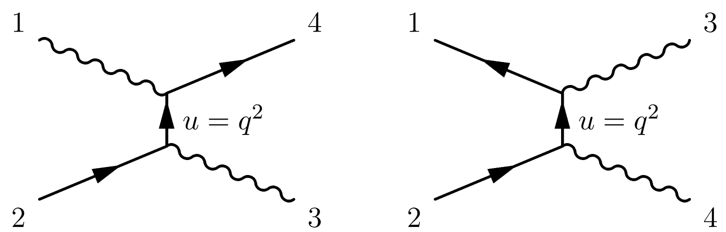
$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \Big\langle \Big|$



$\Big|^2 \Big\rangle = \ldots = -2e^4 \cdot \left(\frac{u}{s} + \frac{s}{u}\right)$

Daraus folgt für den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle}{s} \\ &= -\frac{\alpha_{em}^2}{2s} \cdot \left(\frac{1+\cos\Theta^*}{2} + \frac{2}{1+\cos\Theta^*}\right)\end{aligned}$$



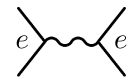
Crossing Vertauschung von „Beinen"; zum Beispiel: $\overset{1}{\gamma}\overset{2}{e^-} \to \overset{3}{\gamma}\overset{4}{e^-}$ wird zu $\overset{1}{e^+}\overset{2}{e^-} \to \overset{3}{\gamma}\overset{4}{\gamma}$ (siehe Diagramme oben)

Auch nach der Vertauschung der Beine 1 und 4 bleibt das u-Kanal-Diagramm im obigen Beispiel ein u-Kanal-Diagramm. (Hingegen wird aus einem t- ein s-Kanal-Diagramm und umgekehrt.) Der Wirkungsquerschnitt bleibt also gleich, außer dass s und t vertauscht werden müssen und pro vertauschtem Fermion ein :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(e^+e^- \to \gamma\gamma) = \frac{\alpha_{em}^2}{2s} \cdot \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u}\right) = \frac{\alpha_{em}}{s} \cdot \frac{1+\cos^2\Theta*}{1-\cos^2\Theta*}$$

5.4.4 Höhere Ordnungen

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \sim \Bigg|$$



$$\Bigg|^2 \sim e^4 \sim \alpha_{em}^2$$

Es ist aber auch möglich, dass das Photon zwischenzeitlich ein Teilchenpaar bildet. In diesem Falle geht die elektromagnetische Kopplung viermal ein. Die Betrachtung dieser zweiten Ordnung liefert

Es bildet sich bei Betrachtung der nächsthöheren Ordnungen eine Störungsreihe, deren Glieder höherer Ordnung für kleine α aber vernachlässigbar klein sind.

6 Das Standardmodell der Teilchenphysik

6.1 Symmetriegruppen

Gruppen kenner wir bereits aus der Mathematik, zur Wiederholung.

Gruppe Eine Paar aus einer abgeschlossenen Menge und einer Operation mit folgende Eigenschaften:

- es existiert ein neutrales Element
- es existiert eine inverses Element
- die Operation ist assoziativ

Abelsche Gruppe
eine Gruppe, für die die Kommutativität gilt ($u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$)

Ein wichtiges Beispiel in der Physik sind die $n \times n$-Matrizen mit der Multiplikation. WIr führen spezielle Gruppen ein, die häufig verwendet werden:

$O(n)$ „orthogonal“: $O^t \cdot O = \mathbf{1}$

$SO(n)$ „speziell orthogonal“: $O^t \cdot O = \mathbf{1}$ und $\det O = +1$ (sie beschreiben zum Beispiel eine Drehung in $\mathbb{R}^n$)

$U(n)$ „unitär“: $n \times n$-Matrizen mit $U^\dagger U = \mathbf{1}$

$SU(n)$ „speziell unitär“: $n \times n$-Matrizen mit $U^\dagger U = \mathbf{1}$ und $\det U = +1$

Alle Elemente einer unitären Gruppe können mit Hilfe von Erzeugenden $T_1, \ldots, T_m$ dargestellt werden als

$$U' = \mathrm{e}^{i \cdot \sum \Theta_a \cdot T_a} = \mathbf{1} + i \cdot \sum \Theta_a \cdot T_a - \frac{1}{2} \cdot \left(\sum \Theta_a \cdot T_a \right)^2 + \ldots$$

Die T_a sind spurlose, hermitesche Matrizen mit $T_a^\dagger = T_a$ und Θ_a sind Element aus $\mathbb{R}$.

Strukturkonstante
Für eine Gruppe sind die f_{abc} festgelegt durch $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$

Beispiel 6.1 für $SU(2)$-Matrix

$SU(2)$ bedeutet, dass wir eine speziell unitäre 2×2-Matrix haben. Die Erzeugenden seien:

$$T_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 \quad \text{und} \quad T_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

Hierbei sind σ_i die Pauli-Spin-Matrizen.

Bemerkung

- Die Basisvektoren $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$ sind nur Eigenfunktionen zu T_3 mit dem Eigenwert $\pm 1/2$
- Die Basisvektoren $(1,1)^T$ und $(1,-1)^T$ sind nur Eigenfunktionen zu T_1 mit dem Eigenwert $\pm 1/2$

6.2 Ladungen und Eichgruppen der Wechselwirkungen

In der Quantenelektrodynamik habe wir festgestellt, dass die Lagrangedichte unter lokaler Eichung $\Psi \to \Psi' = \mathrm{e}^{i \cdot \Theta(x) \cdot \widehat{Q}} \Psi$ invariant sein muss. Die Exponentialfunktion stellt eine Matrix der Gruppe $U(1)$ dar. Da die Vorfaktoren einfache relle Zahlen sind, sieht man, dass der Ladungsoperator $\widehat{Q}$ eine Erzeugende der Symmetriegruppe $U(1)$ ist.

Die Idee hinter dem Formalismus der Eichgruppen ist:

- Zu jeder Wechselwirkung gehört eine Ladung.
- Die Ladungsoperatoren sind die Erzeugenden der Eichgruppen.
- Die lokale Eichinvarianz der Lagrangsdichte erfordert die Eichfelder V_a^μ $(a = 1, \ldots, m)$.
- Die Eichinvariante Lagrangedichte lautet in jeder der Wechselwirkungen:

$$\mathcal{L} = i \cdot \overline{\psi} \cdot \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \cdot \Psi - m \cdot \overline{\Psi}\Psi - \frac{1}{2} \cdot \sum_a V_a^{\mu\nu} V_{a,\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \cdot g_{\mathrm{WW}} \cdot \sum_a T_a \cdot V_{a,\mu}$$

  Dabei beschreibt g_{WW} die Kopplungsstärke, T_a ist die Erzeugende und $V_{a,\mu}$ das Eichfeld.
- Es enstehen Wechselwirkungsterme (Vertices) der Teilchen mit den Eichfeldern (Eichbosonen).

	Quantenelektrodynamik QED	**Quantenflavourdynamik** QFD (schwache WW)	**Quantenchromodynamik** QCD (starke WW)
	entwickelt 1927 – 1930 von Driac, Jordan, Wiegner, Heisenberg, Pauli, Fermi 1949 Feynman, Schwinger 1968/69 Salam, Weinberg	1961 Glashow 1964 – 1967 Higgs, Kibble, Brant, Englet	1965 Han, Nambu 1973 Gross, Politzer, Wilzek, Fritzsch, Leutwyler, Gell-Mann, Weinberg
Symmetrie-gruppe	$U(1)$	$SU(2)_{I^w}$ (der Index steht für die schwache (Isospin) Ladung)	$SU(3)_C$ (der Index steht für die starke (Farb-)Ladung)
Erzeugende	$m=1$	$m=3$	$m=8$
	$\widehat{Q}$	$\frac{1}{2}\tau_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\tau_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\tau_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\lambda_1,\dots,\lambda_8$ mit zum Beispiel $\frac{1}{2}\lambda_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
lokale Um-eichungen	$\Psi'=\mathrm{e}^{i\cdot\Theta(x)\cdot\widehat{Q}}\Psi$	$\Psi'=\mathrm{e}^{i\cdot\sum\limits_{a=1}^{3}\Theta_a(x)\cdot\frac{1}{2}\tau_a}\Psi$	$\Psi'=\mathrm{e}^{i\cdot\sum\limits_{a=1}^{8}\Theta_a(x)\cdot\frac{1}{2}\lambda_a}\Psi$
mit	$\Psi_f=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_f\cdot\mathrm{e}^{-ip_\mu x^\mu}$ für jedes einzelne Fermion	$\Psi=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_{\nu_e}\cdot\mathrm{e}^{ip_\mu x^\mu}\\\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_e\cdot\mathrm{e}^{ip_\mu x^\mu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu_e\\e\end{pmatrix}$ für jedes Paar $\begin{pmatrix}\nu_l\\e\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\nu_\mu\\\mu\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\nu_\tau\\\tau\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\d'\end{pmatrix},(c,s'),(t,b')$	$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_{\text{rot}}\\\Psi_{\text{grün}}\\\Psi_{\text{blau}}\end{pmatrix}$ für Tripletts $\begin{pmatrix}u_r\\u_y\\u_s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d_r\\d_g\\d_s\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}t_r\\t_y\\t_s\end{pmatrix}$

		Quantenelektrodynamik QED	**Quantenflavourdynamik** QFD (schwache WW)	**Quantenchromodynamik** QCD (starke WW)
$\mathcal{D}_\mu$		$\partial_\mu + i \cdot e \cdot Q \cdot A_\mu$ (Photon)	$\partial_\mu + ig_w \cdot \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{2}\tau_a \cdot W_{a,\mu}$ (Weakon, $w^+ +, w^-, z^o$)	$\partial_\mu + ig_s \cdot \sum_{a=1}^{8} \frac{1}{2} \cdot \lambda_a \cdot G_{a,\mu}$ (Gluon)
$V^{\mu\nu}$		$F^{\mu\nu} = \gamma^\mu A^\nu - \gamma^\nu A^\mu$	$W_a^{\mu\nu} = \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu - g_w \varepsilon_{abc} W_b^\mu W_c^\nu$	$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu$
g_{WW}		$e = 0{,}3$	$g_w \approx 0{,}6$	$g_s \approx 1{,}2$
α_{WW} $\frac{g_{\mathrm{WW}}^2}{4\pi}$	$=$	$\alpha_{\mathrm{em}} = 1/137$	$\alpha_w \approx 1/30$	$\alpha_s \approx 1/8$

6.3 Fundamentale Vertices der QFD

In der Lagrangedichte treten Terme auf wie:

$$g_w \overline{\nu}_e \gamma^\mu \left| I^w \right| \underbrace{(w_{1,\mu} - i w_{2,\mu})}_{=\sqrt{2}\cdot w_\mu^+} \cdot e$$

Beispiel 6.2 μ-Zerfall

$m_w = 80\,\text{GeV}$
Dies ist der einzig mögliche Zerfall

7 Starke Wechselwirkung. QCD

Die starke Wechselwirkung wird durch eine dreidimensionale Eichsymmetrie (Symmetriegruppe $SU(3)_c$) und acht Generatoren $\frac{1}{2} \cdot \lambda_a$ beschrieben. Als Austauschteilchen treten **Gluonen** auf, die mit einem Spin von 1 Bosonen sind.

7.1 Farbmultipletts der Quarks und Gluonen

Die $SU(3)$ wirkt auf ein Ladungstriplett der Quarks $|q_r\rangle = (1,0,0)^T \cdot |\psi_q\rangle$, $|q_g\rangle = (0,1,0)^T \cdot |\psi_q\rangle$ und $|q_b\rangle = (0,0,1)^T \cdot |\psi_q\rangle$. Die Generatoren $F_a = F_{1 \cdots 8} = \frac{1}{2} \cdot \lambda_{1 \cdots 8}$ sind die **Gellmann-Matrizen**.

Aus der Betrachtung der Eigenwerte der Generatoren zu den Basisvektoren schließt man, dass es drei verschiedene starke Ladungswerte (**Farbladungen**) gibt, deren Summe immer verschwindet. Zwischen den Basiszuständen $|q_r\rangle$, $|q_g\rangle$ und $|q_b\rangle$ kann man Operatoren wie zum Beispiel $F_1 \pm iF_2$ wechseln.

Somit haben wir die starke Wechselwirkung beschrieben.

- Die starke Wechselwirkung bindet Quarks zu Hadronen (Protonen, Pionen, etc.)
- Reichweite im Femtometerbereich, markoskopisch nicht beobachtbar (Hadronen farbneutral, Quarks existieren nicht ungebunden)
- Beachte: Nur Quarks und Gluonen tragen eine Farbladung, Leptonen jedoch nicht.

Sechs der acht Gluonen wirken wie Leiteroperatoren, sie haben also selbst eine Farbe bzw. Antifarbe:

$$\mathcal{L} = \sum_q \left[i\overline{\Psi}_q \cdot \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_q - \underbrace{\overline{\Psi} \cdot \gamma^\mu g_s \cdot \sum_a \frac{\lambda_a}{2} \cdot G_{a\mu} \Psi}_{\text{Wechselwirkungsterm}} \right] - \frac{1}{4} \cdot G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

Mögliche Gluonen sind:

$$\begin{matrix} & g_{r\overline{g}} & g_{r\overline{b}} \\ g_{g\overline{r}} & & g_{g\overline{b}} \\ g_{b\overline{r}} & g_{b\overline{g}} & \end{matrix} \quad \text{und} \quad g_{r\overline{r}-b\overline{b}} \quad \text{und} \quad g_{r\overline{r}+b\overline{b}-2g\overline{g}}$$

$G^{\mu\nu}$ verhält sich anders als $F^{\mu\nu}$ bei der Quantenelektrodynamik, weil $SU(3)$ nicht abelsch ist:

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s \sum_{bc} f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu \quad \text{vgl.} \quad [F_a, F_b] = i f_{abc} \cdot F_c$$

Damit ergibt sich[1]:

$$-\frac{1}{4} \cdot G_a^{\mu\nu} G_{a,\mu\nu} = -\frac{1}{4} \cdot \Big[\underbrace{\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu}_{(1)} - \underbrace{g_s f_{abc} \cdot G_b^\mu G_c^\nu}_{(2)} \cdot \Big[\underbrace{\partial_\mu G_{a,\nu} - \partial_\nu G_{a,\mu}}_{(3)} - \underbrace{g_s f_{abc} \cdot G_{b,\mu} G_{c,\nu}}_{4} \Big]$$

[1] Man beachte die Summenkonvention.

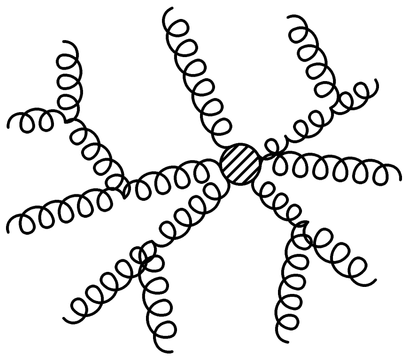
Dabei beschreibt das Produkt der Terme (1) und (3) freie Gluonen. Die Produkte $(1 \cdot 4)$ und $(2 \cdot 3)$ stellen die Erzeugung und Vernichtung von Gluonen aus anderen Gluonen dar. Das Produkt $(2 \cdot 4)$ stellt ein Vertex aus zwei einkommenden und zwei ausgehenden Gluonen dar. (Dies ist in der Quantenelektrodynamik unmöglich, in der Quantenchromodynamik schon.)

Verboten ist hingegen, dass Quarks durch Gluonenemission oder -absorption ineinander übergehen. Zum Beispiel ist $s_g \to s_r + g_{g\bar{r}}$ möglich, nicht aber $s \to d + g$. Auch sind Vertices der Form $q+g \to q+g$ als einzelner Vertex unmöglich. (All dies ist in der Quantenelektrodynamik ebenso der Fall, siehe die Realisierung der Compton-Streuung.)

Man verzichtet in Feynmandiagrammen auf das Antragen der Farben, da zu viele Kombinationen möglich wären. In einem kompletten Prozess liegt immer die Summe über alle Farben vor.

7.2 Das Potential der QCD. Confinement

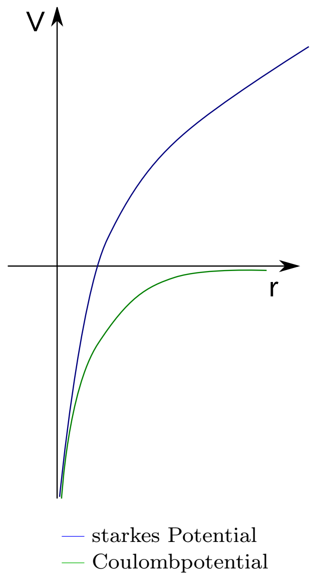
Zur „Herleitung“ des QCD-Potentials: Im Abstand r von einem ersten Quark mit der Farbe c_1 befindet sich ein zweites Quark mit der Farbe c_2. Das erste Quark baut ein Gluonfeld um sich herum auf. Die Dichte der Gluonen fällt *langsamer* als $\sim r^{-2}$ ab. Für die Kraft zwischen beiden Teilchen gilt:



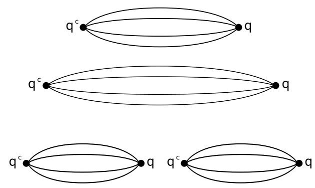
$$\begin{array}{rclclcl} F_{12} & = & P(\text{Abstrahlung}) & \cdot & P(\text{Absorption}) & \cdot & \text{Gluonendichte} \\ & = & g_s c_1 & \cdot & (g_s c_2 + g_s c_3 \cdot r) & \cdot & \frac{1}{4\pi r^2} \end{array}$$

Hierbei sind c_1, c_2, c_3 nicht näher bestimmte Konstanten.

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{g_s^2}{4\pi} \cdot \frac{c_1 c_2}{r^2} + \frac{g_s^2}{4\pi} \cdot \frac{c_1 c_3}{r} \\ &= c_1 c_2 \cdot \frac{\alpha_s}{r^2} + \frac{\kappa}{r} \\ V &= -c_1 c_2 \cdot \frac{\alpha_s}{r} + b \cdot \ln r \end{aligned}$$



In der Realität würde sich in der Situtation zweier eng beieinander liegender Quarks ein Flussschlauch zwischen den Quarks ausbilden, da die Gluonen selbst aneinander koppeln. Die Feldenergie eines solchen Farbdipols ist proportional zur Länge: $V(x) = k \cdot x$ mit $k = 1\,\mathrm{GeV} \cdot \mathrm{fm}^{-1}$. Die Kraft wird annäherend konstant mit:



$$F_{r\to\infty} \approx 1\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{fm}} \approx 10^5\,\mathrm{N}$$

Bei Vergrößerung des Abstandes zwischen zwei solchen Quarks bilden sich zwei Quark-Antiquarkpaare, sofern $\Delta E \geq m_\pi = 0{,}15\,\mathrm{GeV}$. Somit kann man keine einzelnen Quarks erzeugen. Zum Beispiel in der e^+e^--Vernichtung bilden sich teilweise einzelne Quarks, diese bilden aber durch Folgeprozesse große Mengen von Folgeteilchen, sogenannte **Jets**. Man kann also Quarks nicht einzeln nachweisen, nur deren Folgeprodukte.

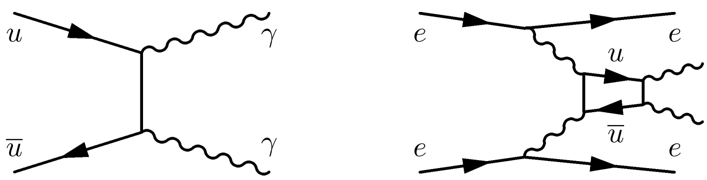
7.3 Experimentelle Bestätigungen der Quantenchromodynamik

7.3.1 Eigenschaften der Gluonen

- Das Gluon ist ein Austauschboson und hat den Spin 1. Dies wird durch die Winkelverteilung von Streuexperimenten bestätigt.
- Aus 4-Jet-Ereignissen bei LEP konnte man die Existenz von Drei-Gluonen-Vertices (also die Selbstwechselwirkung von Gluonen) nachweisen.

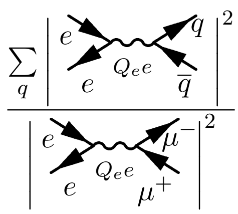
7.3.2 Evidenz für die Existenz dreier Farbladungen

1. In einer Elektron-Positron-Streuung können zwei virtuelle Photonen entstehen, die zunächst ein Pion $\pi^0 = u\overline{u} - d\overline{d}$ bilden. Auch wenn dieses Pion wieder gemäß $\pi^0 \to \gamma\gamma$ zerfällt, kann man anhand der invarianten Masse $m_{\gamma\gamma} = m_{\pi^0}$ feststellen, dass das Photonenpaar aus einem π^0 entstanden ist.

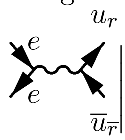
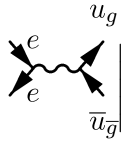
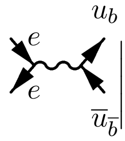
   Es wurde $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = 0{,}81\,\mathrm{eV} \cdot N_c^2$ vorhergesagt, wobei N_c die Anzahl der möglichen Farbladungen ist. (Im Feynmandiagramm sind alle möglichen Farbladungskombinationen als separate Diagramme zu behandeln, damit geht deren Anzahl N_c in die Feynman-Amplitude ein.) Die Messung ergab $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = (7{,}7 \pm 0{,}5)\,\mathrm{eV}$, dies entspricht $N_c^2 \approx 9$.

2. Das R-Verhältnis in den verschiedenen Formen der e^+e^--Vernichtung ist (q ist eine beliebige Hadronenart):

   $$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} =$$
   

   $$= \sum_q Q_q^2$$

Bei N_c verschiedenen Farbladungen lautet die Summation stattdessen:

$\sum_q \Bigg(\Bigg|$  $\Bigg|^2 + \Bigg|$  $\Bigg|^2 + \Bigg|$  $\Bigg|^2 + \dots \Bigg)$

Wiederum müssen nämlich alle möglichen Farbladungen mit separaten Feynman-Diagrammen bedacht werden, da man die Farbladung prinzipiell messen könnte. Berücksichtigen wir weiter, dass ein Quarkpaar qq^c nur bei Vorhandensein einer Mindestenergie $2m_q$ erzeugt werden kann, so ist das R-Verhältnis von der Mandelstam-Variable s abhängig:

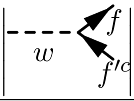
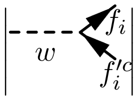
$$\boxed{R(s) = \sum_{2m_q<\sqrt{s}} Q_q^2 \cdot N_c}$$

Als Beispiel betrachten wir ein R-Verhältnis unterhalb von $\sqrt{s} < 2m_c \approx 3\,\text{GeV}$, d.h. es können nur Up-, Down- und Strange-Quarks erzeugt werden:

$$R = N_c \cdot \left(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2\right) = 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 2$$

Wie man sieht, erhält man auf diesem Wege nicht nur die Anzahl N_c von Farbladungsarten, sondern auch die Ladungen Q_q und die Massen m_q der verschiedenen Quarks.

3. **Verzweigungsverhältnisse** (Branching Ratio, BR) der W-Bosonen:

$\text{BR}(W \to ff') = \dfrac{\text{Zahl der Zerfälle in } ff'}{\text{Zahl aller Zerfälle}} =$ $\Bigg|$  $\Bigg|^2$ / $\sum_i \Bigg|$  $\Bigg|^2$ $= \dfrac{\Gamma(W \to ff')}{\sum_i \Gamma(W \to f_i f_i')}$

Im letzten Bruch steht oben die **partielle Zerfallsbreite** und unten die **totale Zerfallsbreite** Γ_{tot}. Mögliche Zerfälle für die $W^{\pm}$-Bosonen sind: (hier beispielhaft für das W^--Boson)

$$\begin{array}{ll} W^- \to e^-\nu_e & W^- \to du^c \\ W^- \to \mu^-\nu_\mu & W^- \to sc^c \\ W^- \to \tau^-\nu_\tau & \cancel{W^- \to bt^c} \end{array}$$

Der letzte Zerfall ist nicht möglich, da das Top-Quark zu schwer ist (vgl. $m_t = 173\,\text{GeV}$ mit $m_W = 80{,}4\,\text{GeV}$). Die linken drei Zerfälle können nur in dieser Form auftreten, während es bei den rechten zwei Zerfällen jeweils N_c Untervarianten gibt. Da die einzelnen Variantenzahlen addiert werden, ergibt sich für die totale Zerfallsbreite:

$$\sum_i \Gamma(W \to f_i f_i') = (3 + 2N_c^2) \cdot \Gamma(W \to ff')$$

Entsprechend lauten die Verzweigungsverhältnisse:

$$\text{BR}(W \to \text{Leptonenpaar}) = \frac{1}{3 + 2N_c^2} \quad \text{und} \quad \text{BR}(W \to \text{Quarkpaar}) = \frac{N_c}{3 + 2N_c^2}$$

Unter der Annahme $N_c = 3$ ergibt sich also ein Verzweigungsverhältnis von $1/9$ für die einzelnen Leptonenarten. Dies stimmt mit dem experimentell ermittelten Wert von 0,108 sehr gut überein.

7.4 Gebundene Zustände

Von allen Wechselwirkungen werden die folgenden Größen erhalten:

- Leptonenzahl: In diese gehen e^+, μ^+ und τ^+ sowie die Neutrinos mit $+1$, die entsprechenden Antiteilchen mit -1 ein. Quarks liefern keinen Beitrag.
- Leptonenfamilie (bei Wechselwirkungs-Eigenzuständen): Die Leptonenzahlen L_e, L_μ und L_τ der einzelnen Leptonenfamilien müssen erhalten bleiben. Im nächsten Semester werden wir sehen, dass diese Erhaltung *nicht* für ν-Masse-Eigenzustände gilt.
- Baryonzahl $\mathbb{B}$: Quarks gehen mit $\mathbb{B} = 1/3$ ein, Antiquarks gehen mit $\mathbb{B} = -1/3$ ein. Leptonen liefern ebenso wie Mesonen keinen Beitrag. Für Hadronen ergibt sich die Baryonzahl als Summe der Baryonenzahlen der Quarks. Zum Beispiel für p, n oder Δ ist die Baryonzahl 1, für die Antiteilchen dieser Hadronen ist sie -1.

Wir benutzen außerdem den **starken Isospin** I^S, insbesondere dessen dritte Komponente I_3^S:

$$m_p \approx m_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} I_3^S & = & +\frac{1}{2} \\ I_3^S & = & -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} uud \\ udd \end{pmatrix}$$

$$m_{\Sigma^+} \approx m_{\Sigma^0} \approx m_{\Sigma^-} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} I_3^S & = & +1 \\ I_3^S & = & 0 \\ I_3^S & = & -1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} uus \\ uds \\ dds \end{pmatrix}$$

Der starke Isospin I^S ist eine reine Buchhaltungsgröße. Er entspricht keiner Eichsymmetrie und ist keine Ladung für irgendeine Wechselwirkung, aber es gibt einen Erhaltungssatz. Den starken Isospin haben nur die u- und d-Quarks.

Weiterhin kann man noch die **starke Hyperladung** Y^S definieren.

$$Y^S = \frac{\mathbb{B} + S + C + B + T}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = I_3^S + Y^S}$$

Hierbei sind:

- S die Strangeness ($S = -1$ für s-Quarks, sonst $S = 0$)
- C der Charm ($C = 1$ für c-Quarks, sonst $C = 0$)
- B die Bottomness ($B = -1$ für b-Quarks, sonst $B = 0$)
- T die Topness ($T = 1$ für t-Quarks, sonst $T = 0$)

8 Teilchenidentifikation in Detektoren

8.1 Übersicht

Zu messen sind der Impuls $\vec{p}$, die Energie, E, die Art und der Produktionsort.

stabiles Teilchen
: ein Teilchen, dass im Detektor ankommt (Lebensdauer $\tau > 1\,\mathrm{ns}$)
Beispiele: μ, e, ν, p, n, $\pi^{\pm}$, $k^{\pm}$

langlebiges Teilchen
: legt vor seinem Zerfall eine messbare Strecke zurück (Lebensdauer um $1\,\mathrm{fs} < \tau < 1\,\mathrm{ns}$)
Beispiele: $\tau^{\pm}$, alle leichtesten Hadronen mit s-, c- und b-Quarks, also $K^0_{(s)}$, D^0, $D^{\pm}$, $B^{0/\pm}$, Λ^0, $\Sigma^{\pm}$

instabiles Teilchen
: zerfällt „sofort“, also bevor man davon in irgendeiner Weise Notiz nehmen könnte
Beispiele: π^0, t-Quark (hier gehören die meisten Teilchen hin)

Instabile Teilchen werden durch Betrachtung der invarianten Masse rekonstruiert. Die anderen Teilchen kann man oft schon anhand der Art der Wechselwirkung, die ihren Zerfall auslöst, bestimmen.

	Ionisation	**elektromagn. Schauer**	**hadron. Schauer**	**schwache Wechselwirkung**
$Q \neq 0$	alle, aber insb. $\mu^{\pm}$	$e^{\pm}$	$\pi^{\pm}$, $k^{\pm}$, p, ${}^2_1\mathrm{D}$	(alle)
$Q = 0$		γ	n, $K^0_{(L)}$	alle außer γ, aber insb. ν

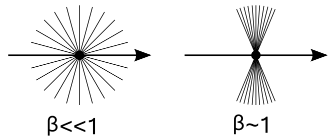
8.2 Wechselwirkung der Teilchen

8.2.1 Energieverlust durch Ionisation

Der spezifische Energieverlust wurde von BETHE-BLOCH beschrieben:

$$-\left\langle\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right\rangle = 0{,}30\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\underbrace{\varrho\cdot\frac{Z}{A}}_{=n_0/N_A}\cdot\frac{Q^2}{\beta^2}\cdot\left[\ln\frac{2m_e\cdot\beta^2\gamma^2}{I}-\beta^2-\delta(\beta\gamma)\right]$$

Hierbei sind Z und A die Protonenzahl bzw. Atommassenzahl. Der Faktor $1/\beta^2$ kommt aus dem Kraftstoß $\Delta p = F_0\cdot\Delta t$ mit dem ionisierten Teilchen. Der Logarithmusterm beschreibt die Krümmung der elektrischen Felder aufgrund der relativistischen Bewegung des Teilchens, dabei ist $I\sim 10\,\mathrm{eV}\cdot Z$ das mittlere Ionisationspotential. Der letzte Term in der Klammer spiegelt die Sättigung durch die Polarisation wieder. Im Festkörper liegt der Energieverlust bei einigen $\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{cm}^{-1}$ bei einigen zehntausend Ionisationen pro cm (Gauss- und δ-Elektronen). Für Gase liegt der Verlust bei einigen keV/cm.



Krümmung des elektrischen Feldes bei relativistischer Bewegung

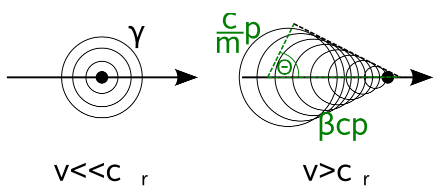
Prinzipiell ist der Energieverlust von der Struktur des Materials unabhängig, der dominante Unterschied zwischen verschiedenen Stoppermaterialien ist deren Dichte ϱ. Eine Teilchenidentifikation ist also nicht allein durch die Strukturfunktion $f(\beta\gamma)$ möglich, man braucht auch $f(p)$, also muss man neben $\beta\gamma = p/M$ auch den Impuls höchstselbst messen.

Allgemein muss man zur vollständigen Teilchenidentifikation mindestens zwei Größen messen, aus denen man auf die Ruhmasse m und die Geschwindigkeit β bzw. γ schließen kann. Möglich sind:

- Energieverlust $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(\beta,\gamma)$ und Impuls $p(m,\beta,\gamma)$
- Flugzeit $T(\beta)$ und Impuls $p(m,\beta,\gamma)$
- Energieverlust $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(\beta,\gamma)$ und Eindringtiefe $R(E=\gamma m)$

8.2.2 Cerenkov-Strahlung

Die **Cerenkov-Strahlung** ist, in Analogie zum Überschallkegel, quasi ein „Überlichtkegel“ für Teilchen im Medium mit $\beta\cdot c > c_{\mathrm{Medium}} = c/n$. Tritt das Teilchen in ein solches Medium ein, bauen die ausgesandten Photonen wie in der Skizze rechts einen Kegel auf. Uns interessiert der **Cerenkov-Winkel** Θ_c zwischen der bisherigen Flugbahn eines Photons auf der Wellenfront und der Flugbahn des Teilchens:



Cerenkov-Strahlung

$$\cos\Theta_c = \frac{c/n}{\beta\cdot c} = \frac{1}{\beta\cdot n}$$

Durch $\cos\Theta_c < 1$ werden die Fälle begrenzt, in denen Cerenkov-Strahlung auftritt:

$$1 > \cos\Theta_c = \frac{1}{\beta\cdot n} \quad\Rightarrow\quad \beta > \frac{1}{n}$$

8.2.3 Elektromagnetische Schauer

Ein **elektromagnetischer Schauer** wird von $e^{\pm}$ und γ ausgelöst. Zu Beginn werden Elektronen im Feld von Atomkernen abgebremst (Bremsstrahlung), wobei die Kernladungszahl Z eine große Rolle spielt. Im Fall der Photonen beginnt der Schauer mit einer Paarbildung im Feld von Atomkernen. Die relevanten Zerfallsprozesse sind also:

$$e^{\pm} \to e^{\pm} + \gamma \quad \text{und} \quad \gamma \to e^{+} + e^{-}$$

Charakteristisch für den Schauer ist die Strahlungslänge X_0, also die mittlere Länge, die ein Teilchen des Schauers zurücklegt, bevor es selbst zerstrahlt. Die Stärke der Bremsstrahlung hängt direkt mit dieser Strahlungslänge zusammen:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Brems}} = \frac{E}{X_0} \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{Brems}} \sim \frac{Z^2}{m_e^2}$$

Der Effekt der Bremsstrahlung wird direkt von der Protonenzahl Z der Atomkerne bestimmt, da die Bremsstrahlung in einem Prozess erzeugt wird, der strukturell der Compton-Streuung gleicht (jedoch mit einem Protonen als Stoßpartner).

Die Energie des primären Teilchens verringert sich aufgrund der Verteilung der Energie auf die anderen Teilchen:

$$\langle E(x)\rangle = E \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{X_0}}$$

Neben der Bremsstrahlung kann das Elektron seine Energie durch Ionisation abgeben.

	Ionisation	**Bremsstrahlung**
Streuzentren	Elektronen	Kerne
Streuzentrendichte	$N_A \cdot \varrho \cdot \frac{Z}{A}$	$N_A \cdot \frac{\varrho}{A}$
Wirkungsquerschnitt	$\sim Q_e^2 = 1$	$\sim Z^2/m^2$
Energieverlust	$\sim x$ ($\mathrm{d}E/\mathrm{d}x \approx$ const.)	$\sim E$

Ab einer kritischen Energie E_c ist der Energieverlust durch Bremsstrahlung größer als der durch Ionisation:

$$\frac{\varrho}{A} \cdot \frac{Z^2}{m^2} \cdot E \cdot \text{const.} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Brems}} > \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Ion}} = \varrho \cdot \frac{Z}{A} \cdot \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_C = \frac{m^2}{0{,}4\,\mathrm{keV} \cdot Z}}$$

Beispiel 8.1 Eisen, $Z = 26$

In die Formel eingesetzt ergeben sich $E_c \approx 25\,\mathrm{GeV}$ für Elektronen und $E_c \approx 1000\,\mathrm{GeV}$ für Myonen. Somit kann die Bremsstrahlung für Myonen in normalen Detektoren vernachlässigt werden.

Auch die Strahlungslänge ist von anderen Größen abhängig. Sehr grob kann man die Abhängigkeiten wie folgt zusammenfassen:

$$X_0 \sim \frac{1}{\varrho \cdot Z}$$

Mithilfe der Feynmanregeln stellt man fest, dass die Strahlungslänge von Photonen um den Faktor 7/9 geringer ist als die der Elektronen. Das liegt vor allem an der längeren Zeit, die vergeht, bis es zur Paarbildung kommt.

Beim elektromagnetischen Schauer interessiert man sich auch für die Ausdehnung. In longitudinaler Richtung ist diese charakterisiert durch den Abstand, in dem der maximale Energieverlust erreicht wird (da schon sehr viele Sekundärteilchen erzeugt wurden, aber gerade noch genug Energie zur Verfügung steht):

$$X_{\max} = X_0 \cdot \ln\left(\frac{E}{E_C} + t_0\right)$$

Hierbei ist t_0 ein Korrekturfaktor für die Teilchenart ($t_0 = 0{,}5$ für Photonen und $t_0 = -0{,}5$ für Elektronen). Ähnlich kann man die laterale Ausdehnung durch den **Moliere-Radius** quantifizieren:

$$R_M \sim 21\,\text{MeV} \cdot \frac{X_0}{E_C}$$

Innerhalb dieses Radiuses strahlen 90% der Teilchen, im doppelten Radius 95% der Teilchen.

Photonen einer Energie im keV-Bereich geben Energie vorwiegend durch den photoelektrischen Effekt ab. Ab einer Energie von ungefähr 10 MeV findet vorwiegend der Comptoneffekt statt. Erst ab $E = 2m_e \approx 1\,\text{GeV}$ kann es zu Paarbildung kommen, dessen Wirkungsquerschnitt nimmt dann mit steigenden Energien rasant zu.

8.2.4 Hadronische Schauer

Ein **hadronischer Schauer** kann von allen stabilen Teilchen (p, n, $\Pi^\pm$, $K^\pm$, K_L^0) ausgelöst werden. Dieser Schauer entsteht durch die starke Wechselwirkung. Die Wechselwirkungsteilchen der starken Wechselwirkung haben aber eine sehr kurze Reichweite (1 fm), das heißt: die Prozesse müssen nah am Kern stattfinden. Es entstehen im Wesentlichen leichte Hadronen ($\pi^{0,\pm}$, p, n, ${}^2_1D$, ${}^4_2\alpha$). Der Zerfall $\pi^0 \to \gamma\gamma$ führt zu einer **elektromagnetischen Komponente** im Schauer. Die anderen Teilchen bezeichnet man zusammenfassend als die **hadronische Komponente**, die entweder durch Ionisation Energie verliert, oder weitere hadronische Wechselwirkungen ausführt.

Hadronische Wechselwirkungslänge

λ_{int} ist die mittlere Länge, bis es zu einer Wechselwirkung kommt.

$$\lambda_{\text{int}} = \frac{1}{\sigma_{\text{int}} \cdot n} \sim \frac{A^{1/3}}{\varrho}$$

Damit ergibt die die Anzahl der Teilchen, die noch nicht hadronisch wechselgewirkt haben:

$$I(x) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-x/\lambda_{\text{int}}}$$

8.3 Detektorkonzepte

8.3.1 Kalorimeter

Hier unterscheidet man zwei Grundtypen:

- **homogenes Kalorimeter**: Der Absorber ist auch der Detektor, das heißt: er ist auslesefähig. Hier werden Prozesse wie Szintillation, Cerenkov-Strahlung und Ladungs-/Stromerzeugung genutzt.
- **Sampling-Kalorimeter**: Ist der Absorber blind, so fügt man zwischen den Absorbern Detektorschichten ein (Sandwich-Prinzip).

Die Energieauflösung wird durch drei Terme bestimmt. Zum einen wird die Energie in sekundäre Teilchen des Schauers umgesetzt ($E \sim N_{\text{Schauer}}^{\text{sek}}$). Dieser Prozess ist rein statistischer Natur:

$$\Delta E_{\text{Schauer}} \sim \sqrt{N_{\text{Schauer}}^{\text{sek}}} \sim \sqrt{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta E_{\text{Schauer}}}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

Weiterhin kommt es zu einem konstanten Rauschen:

$$\frac{\Delta E_{\text{Rausch}}}{E} \sim \frac{1}{E}$$

Als dritter Faktor kommt eine geometrische Komponente hinzu, da zum Beispiel einige Teilchen nicht den Detektor treffen und verstärkt nichtlineare Effekte hinzukommen.

$$\Delta E_{\text{geom}} \sim E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta E_{\text{geom}}}{E} = \text{const.}$$

Insgesamt liegt die Energieauflösung im Bereich einiger Prozent. Neben der Grundenergie selber hängt sie bei Sampling-Detektoren noch von der *sampling fraction*, also dem Dickenverhältnis von Detektoren und Absorbern, ab.

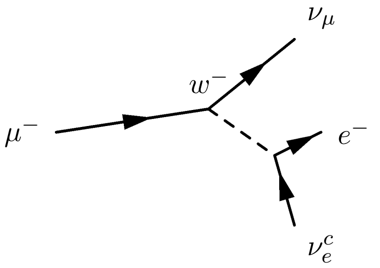
8.3.2 Spurdetektoren

Diese Detektoren dienen der Messung der Impulses p über den Krümmungsradius R. Hier verlieren die gemessenen Teilchen sehr wenig Energie. Mit diesen Informationen kann man die Produktionsorte (Vertices) rekonstruieren.

Realisiert werden solche Detektoren klassisch zum Beispiel als Nebel- und Blasenkammern, bei denen man die Bahn direkt sehen oder abfotografieren kann. Moderner sind elektronisch auslesbare Detektoren, zum Beispiel Driftkammern, in denen stromdurchflossene Drähte verteilt sind. Durchfliegende Teilchen ionisieren das Gas in der Kammer, die Ionen wandern zu den Stromdrähten und erzeugen einen zeitlich rückverfolgbaren Impuls, der zur Rekonstruktion der Teilchenflugbahn genutzt werden kann. Wichtig bei der zeitlichen Rekonstruktion ist die Driftzeit des Ions, die im Mikrosekundenbereich liegt ($v_{\text{Drift}} \approx 40\,\mu\text{m} \cdot \text{ns}^{-1}$).

9 Schwache Wechselwirkung. Quantenflavordynamik

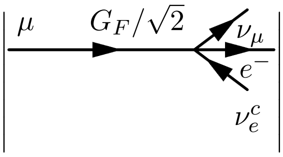
Bei vielen Zerfällen ändern sich die Teilchenarten. Beispiele sind der Beta- und der Myon-Zerfall:



$$\begin{aligned} n &\to p + e^- + \nu_e^c \\ \mu^- &\to \nu_\mu + e^- + \nu_e^c \end{aligned}$$

9.1 Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung

Als Ansatz wählen wir eine Strom-Strom-Kopplung (also einen imaginären Vierer-Vertex) mit einer universellen Kopplungskonstante $G_F/\sqrt{2}$ mit $G_F \approx (300\,\text{GeV})^{-2}$. Die beiden auftretenden Stromdichten verlaufen entlang der Teile, die in einem einzelnen Schritt entstehen. Im Falle des Myonzerfalls haben wir also zwei Ströme $J^\mu(\mu^- \to \nu_\mu)$ und $J^\mu(\nu_e^c \to e^-)$

$\mathcal{M} =$ 

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot J^\mu(\mu^- \to \nu_\mu) \cdot J_\mu(\nu_e^c \to e^-) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot (\overline{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu u_\mu) \cdot (\overline{u}_e \gamma_\mu u_{\nu_e})$$

Diese Darstellung ist sehr gut für alle Prozesse mit Impulsübertragen $q^2 \ll G_F^{-1}$ bzw. $q^2 \ll m_W^2$.

Bemerkung

Die genaueste Messung der Kopplungskonstante G_F erhält man aus dem Myon-Zerfall:

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \frac{1}{192 \cdot \pi^3} \cdot G_F^2 \cdot m_\mu^5 = \frac{1}{2{,}197\,\mu\text{s}} \quad \Rightarrow \quad G_F = 1{,}166\,39(1) \cdot 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}$$

Es bleiben noch zwei offene Fragen:

1. Welche Lorentzstruktur hat J^μ? Dies bestimmt insbesondere das Verhalten unter Raumspiegelung. Möglich sind (mit $\overline{\psi} = \psi^+ \cdot \gamma^0$):
   - Skalar: $\overline{\psi}\psi$ (Parität: $+$)
   - Pseudo-Skalar: $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ (Parität: $-$)
   - Vektor: $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Parität: $+ - - -$)
   - Axialvektor: $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ (Parität: $- + + +$)

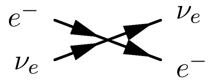
Dies kann man sich mit $\mathcal{P}\psi(\vec{r}) := \gamma^0\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$ herleiten, zum Beispiel:

$$\mathcal{P}(\overline{\psi}\gamma^5\psi) = (\overline{\gamma^0\psi}) \cdot \gamma^5 \cdot (\gamma^0\psi) = -\overline{\psi}\gamma^5\psi$$

Die Antwort auf die Frage nach der Lorentzstruktur kam 1956 sehr überraschend:

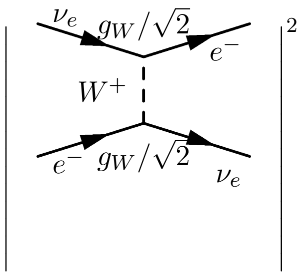
$$J^\mu = \frac{1}{2} \cdot \overline{\psi} \cdot (\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^5) \cdot \psi$$

2. Hochenergieverhalten: Aus Dimensionsbetrachtungen konnte man den Prozess $\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-$ charakterisieren.



$\Rightarrow \quad \sigma(e^-\nu \to e^-\nu) \sim G_F^2 \cdot s$

Der Wirkungsquerschnitt steigt also bei größer werdender Schwerpunktsenergie (denn $s = E_{\text{CM}}^2$). Dies verletzt die sogenannte **Unitarität** für $\sqrt{s} > 880\,\text{GeV}$, das heißt: die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit würde auf über 100% steigen. Dies konnte man nur durch die Einführung eines massiven Austauschteilchens für den „geladenen" schwachen Strom ausgleichen:



$\approx G_F^2 \cdot m_W^2 \quad$ für $\quad s \gg m_W^2$

Wie erhalten wir g_W und m_W aus G_F (und umgekehrt)? Das Matrixelement des Myon-Zerfalls wird:

$$\mathcal{M} = \frac{g_W}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{u}_{\nu_\mu} \cdot \left(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^5\right) u_\mu\right] \cdot \frac{1}{q^2 - m_W^2} \cdot \frac{g_W}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\overline{u}_e \cdot (\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma^5) u_{\nu_\mu}\right]$$

Damit ergibt sich die folgende Beziehung:

$$\boxed{\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{g_W^2}{m_W^2}}$$

Als diese Theorie entstand, wusste man nur, dass $m_\mu = 0{,}1\,\text{GeV} \ll m_W < 880\,\text{GeV}$ ist. Ein paar Beispiele für mögliche Werte von g_W und m_W wären dann:

g_W	1	$0{,}3 \approx e$	0,1
m_W	123 GeV	37 GeV	12 GeV

9.2 Paritätsverletzung

Zur Erinnerung: J enthält den Gesamtspin, P ist die Parität und C ist die Ladungskonjugation.

$$J^{PC} = f(\vec{l}, \vec{s})$$

Beispiele sind die Pionen $\pi^0 = 1/\sqrt{2} \cdot (uu^c - dd^c)$ mit 0^{-+} und $\pi^+ = (u\overline{d})$ mit 0^-. Weitere Bespiele sind $K^+ = (n\overline{s})$ mit 0^- und $\Upsilon = (bb^c)$ mit 1^{--}.

In der Blasenkammer wurde 1956 das $\theta - \tau$-Rätsel beobachtet: Man vermutete zunächst, dass es zwei positive Kaonen gäbe, von denen eines in zwei und eines in drei Teilchen zerfällt.

$$\begin{array}{lcll} K_\theta^+ & \to & \Pi^+\Pi^0 & 0^+ \\ K_\tau^+ & \to & \Pi^+\Pi^0\Pi^0 & 0^- \end{array}$$

Trotzdem sind die Masse m und die Lebensdauer τ identisch. Das Rätsel wurde 1956 von Lee und Yang gelöst. Die Idee war, dass die schwache Wechselwirkung die Parität verletzen kann. Dies war bis dahin nie experimentell überprüft werden. Noch im selben Jahr wurde die Chien-Shiung-Wechselwirkung am β^--Zerfall polarisierter ^{60}Co-Kerne bei $T = 0{,}001\,\mathrm{K}$ beobachtet.

$${}^{60}_{27}\mathrm{Co} \to {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + e^- + \nu_e^c$$

Der (o.E.d.A. positiv gerichtete) Spin des Kernes verringert sich in diesem Prozess von $j = 5$ auf $j = 4$. Jeweils ein positiver Spin von $s = 1/2$ geht auf das Elektron und das Elektron-Neutrino über. Beide Teilchen haben aufgrund Impulserhaltung eine entgegengesetzte Helizität. Man würde erwarten, dass sich die Helizitäten gleichmäßig verteilen. Tatsächlich nimmt das Elektron aber bevorzugt $h = -1$, das Neutrino $h = 1$ an. Für die Impulsverteilung gilt also:

$$A_e = \frac{N_e(p_z > 0) - N_e(p_z > 0)}{N_e(p_z > 0) + N_e(p_z > 0)} \neq 0$$

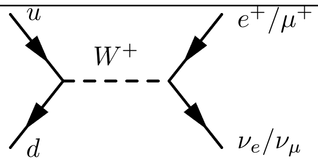
Die mittlere Helizität der e^- ist $\langle h \rangle = -0{,}7$ und die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\langle \beta \rangle = 0{,}7 = -\langle h \rangle$. Die entstehenden Elektronen sind somit komplett linkschiral. Das ist eine maximale Symmetrieverletzung. Der Grund ist, dass die schwache Wechselwirkung nur an linkschirale Elektronen koppelt.

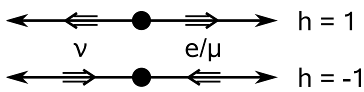
Warum bekommt man daraus eine V-A-Struktur? Dazu betrachten wir den Faktor im μ-Zerfall:

$$\begin{aligned} M &\sim \underbrace{\overline{u}_{\nu_\mu} \cdot \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)}_{\text{für } \nu_L} \cdot \gamma_\mu \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \cdot u_\mu}_{\text{für } \mu_L} \\ &\sim u_{\nu_\mu} \cdot \gamma_\mu \cdot \tfrac{1}{2}(1 - \gamma_5) \cdot \tfrac{1}{2}(1 - \gamma_5) \cdot u_\mu \\ &= u_{\nu_\mu} \cdot \gamma_\mu \cdot \tfrac{1}{2}(1 - \gamma^5) \cdot u_\mu \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot u_{\nu_\mu} \cdot (\gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma^5) \cdot u_\mu \end{aligned}$$

Der Klammerterm zeigt, dass es sich tatsächlich um eine V-A-Struktur handelt.

Beispiel 9.1 Zerfall des π^+ in Leptonen





Dieser Zerfall hat die folgenden Branching Ratios:

$$\mathrm{BR}(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 99{,}988\% \quad \text{und} \quad \mathrm{BR}(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 0{,}012\%$$

9.3 Die schwachen Wechselwirkungen

1961 wurde von Glashow der Vorschlag gemacht, man solle eine $SU(2)_L$-Symmetrie annehmen, also die folgenden Paare bilden:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Diese Familien unterscheiden sich jeweils nur durch die Richtung des **schwachen Isospins**. Dieser Isospin ist so normiert, dass $I_3 = 1/2$ für Neutrinos sowie die u-, c- und t-Quarks ist, sonst $I_3 = -1/2$. Für alle rechtschiralen Teilchen ist hingegen $I_3 = 0$, diese nehmen gar nicht an der schwachen Wechselwirkung teil. (Daher stammt der Index L in $SU(2)_L$.)

Wie kann man nun die Spiegelsymmetrieverletzung einbauen? Man möchte ein direktes Produkt aller bekannten Symmetriegruppen bilden:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Q$$

(von links nach rechts: Symmetriegruppen der starken, schwachen, em. Wechselwirkung). Das Problem ist, dass $SU(2)_L$ und $U(1)_Q$ nicht vertauschbar sind. Bei $SU(2)_L$-Transformationen ändert sich die Ladung! Die Lösung stellt eine Ladung Y^W dar.

$$Y^W(u) = Y^W(d) \quad \text{und} \quad Y^W(e) = Y^W(\nu) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y^W := Q - I_3^W}$$

Es ergibt sich eine neue Eichgruppe der Symmetrie:

$$\boxed{SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y}$$

9.3.1 Die elektroschwache Mischung

Der erste Term in der neuen Gesamt-Symmetriegruppe kommt aus der QCD, der zweite aus der QFD (nur für linkschirale Teilchen) und der dritte aus QED und QFD mit der schwachen Hyperladung $Y^W = Q - I_3^W$. Es gibt also *zwei schwache Wechselwirkungen*, die untereinander vertauschen.

Eichsymmetrie	$U(1)_1$	$SU(2)_L$
Eichfelder	B_μ	$W_{1\mu}$, $W_{2\mu}$, $W_{3\mu}$
Eichbosonen	B-Bosen	W-Bosonen (Weakonen) W^+, W^-, W^3
Ladung	schwache Hyperladung $Y^W = Q - I_3^W$	schwacher Isospin I_3^W
Teilchenfelder	alle Teilchen mit allen Chiralitäten	nur linkschirale Teilchenpaare (Neutrinos/Leptonen, Quarks einer Familie)

Lagrange-Dichten $\mathcal{L}$ werden gegenüber der schwachen Wechselwirkung eichinvariant, indem man die Ableitung durch die **kovariante Ableitung** ersetzt:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ig_y \cdot \widehat{Y}^W B_\mu + ig_w \cdot \sum_{a=1}^{3} \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\widehat{I}^W} \cdot \tau_a \cdot W_{a\mu}$$

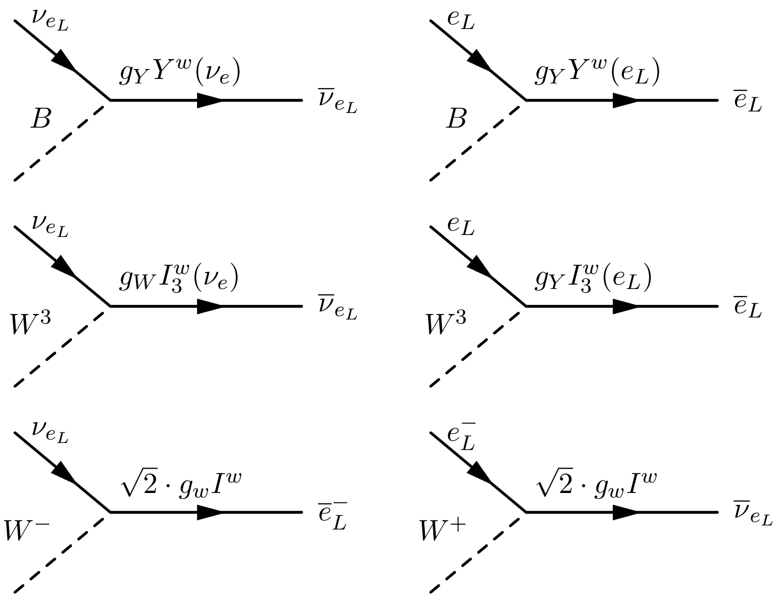
Die Kopplungsstärken $g_y = 0{,}35$ und $g_w = 0{,}63$ sind zwei nicht vorhersagbare Naturkonstanten. Anschaulich entsprechen sie der Häufigkeit der Eichkorrekturen durch diese Eichbosonen.

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = \sum_{f_L, f_R} \overline{\psi}_f \cdot i\gamma^\mu D_\mu \psi_f - \frac{1}{4} \cdot B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \cdot W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

Die Lagrange-Dichte enthält Wechselwirkungsterme, wie zum Beispiel:

$$(\overline{\nu}_e, \overline{e})_L \cdot i\gamma^\mu \cdot \left[\partial_\mu + ig_y \cdot \widehat{Y}^W B_\mu + ig_w \cdot \widehat{I}^W \cdot \begin{pmatrix} W_{3\mu} & W_{1\mu} - i \cdot W_{2\mu} \\ W_{1\mu} + i \cdot W_{2\mu} & W_{3\mu} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

Die Gleichung ergibt zwei Vertices für B_μ und vier Vertices für W_μ.

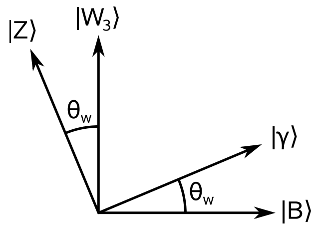


Man beachte in diesen Diagrammen, dass ein Überstrich für Adjunktion steht, nicht für Antiteilchen. Die W^+- und W^--Bosonen ergeben sich als Überlagerung aus den

$$W_\mu^- := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (W_{1\mu} + iW_{2\mu}) \quad \text{und} \quad W_\mu^+ := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (W_{1\mu} - iW_{2\mu})$$

Es sind zu beachten:

- W_1, W_2 und W_3 koppeln *nicht* an rechtschirale Fermionen f_R (wegen $I^w(f_R) = 0$)
- B koppelt *auch* an rechtschirale Fermionen, außer an Neutrions (wegen $Y^w(\nu_R) = 0$)
- B und W_3 tun sehr ähnliche Dinge für linkschirale Fermionen f_L (z. B. für ν_L Eichkorrekturen in entgegengesetzter Richtung wegen $Y^w = -I_3^w$, aber mit unterschiedlicher Häufigkeit).



Mischung von Eichbosonen

Eine geeignete Mischung von $|B\rangle$ und $|W_3\rangle$ im Verhältnis

$$\frac{g_y}{g_w} = \frac{\sin\theta_w}{\cos\theta_w} = \tan\theta_w$$

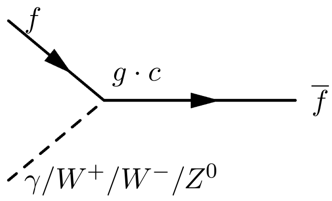
hat *keine Wirkung* auf Neutrinos. Das ist genau das Photon, das in den Kalkül der schwachen Wechselwirkung eingemischt ist (**elektroschwache Mischung**). Der Winkel θ_w wird als „weak mixing angle“ oder **Weinberg-Winkel** bezeichnet. Durch geeignete Mischung des B-Bosons und des W^3-Weakons entsteht nicht nur das Photon, sondern auch das Z-Boson:

$$\begin{aligned} |\gamma\rangle &:= \sin\theta_w \cdot |W_3\rangle + \cos\theta_w \cdot |B\rangle \\ |Z\rangle &:= \cos\theta_w \cdot |W_3\rangle - \sin\theta_w \cdot |B\rangle \end{aligned}$$

Noch 1961 behauptete Glashow, dass sich diese Mischung von alleine einstellt. Higgs führte 1964 die Symmetriebrechung ein. Damit konnten dann 1967 Salam und Weinberg die Mischung mit dem Higgsfeld erklären. Weiterhin definiert man die Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung:

$$e := g_Y \cos\theta_w = g_w \sin\theta_w$$

Im Allgemeinen hat eine Wechselwirkung eine Kopplungskonstante g (die die Stärke der Kopplung beschreibt) und eine Ladung C (die die Sensitivität eines Teilchens für die Kopplung darstellt). Der allgemeine Wechselwirkungsvertex der elektroschwachen Wechselwirkung sieht also so aus:



Für die Kopplungskonstante sowie die Ladung gilt in den verschiedenen möglichen Konstellationen:

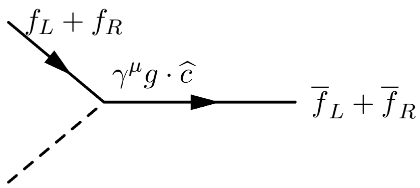
$$\begin{aligned}
g^{W^\pm} \cdot c^{W^\pm} &= \sqrt{2} \cdot g_w \cdot I^w \\
g^\gamma \cdot c^\gamma &= \sin\theta_w \cdot g_w \cdot I_3^w + \cos\theta_w \cdot g_y \cdot Y^w \\
&= e \cdot Q \\
g^Z \cdot c^Z &= \cos\theta_w \cdot g_w \cdot I_3^w - \sin\theta_w \cdot g_y \cdot Y^w \\
&= \tfrac{g_w}{\cos\theta_w} \cdot \left[\cos^2\theta_w \cdot I_3^W - \sin\theta_w \cos\theta_w \cdot \tfrac{g_y}{g_w} \cdot (Q - I_3^w)\right] \\
&= \tfrac{g_w}{\cos\theta_w} \cdot \left[\cos^2\theta_w \cdot I_3^w + \sin^2\theta_w \cdot I_3^w - \sin^2\theta_w \cdot Q\right] \\
&= \tfrac{g_w}{\cos\theta_w} \cdot \left[I_3^w - \sin^2\theta_w \cdot Q\right]
\end{aligned}$$

Wir führen die **Masseneigenzustände** für Fermionen $f = f_L + f_R$ ein. Diese haben für unterschiedliche Chiralitäten mitunter verschiedliche Ladungen, sodass die Ladung des gesamten Masseeigenzustandes zunächst nicht definiert ist. Als Beispiel betrachten wir das Elektron:

	Q	I_3^w	Y^w
e_L^-	-1	$-1/2$	$-1/2$
e_R^-	-1	0	-1
$e^- = e_L^- + e_R^-$	-1	n. def.	n. def.

Die Masseeigenzustände brechen die Symmetrie: $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_Q \leftrightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ erfordert $m_f = 0$ für alle f.

Auch wenn das Gemisch aus linkschiralen und rechtschiralen Zuständen a priori nicht beschrieben werden kann, kann man die Kopplung an Masseneigenzuständen betrachten:



$$\begin{aligned}
\gamma^\mu g \cdot \widehat{c} &= \gamma^\mu g \cdot \left[c_L \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1 - \gamma^5) + c_R \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \gamma^5)\right] \\
&= \tfrac{g}{2} \cdot \left[(c_L + c_R) \cdot \gamma^\mu - (c_L - c_R) \cdot \gamma^\mu \gamma^5\right] \\
&=: \tfrac{g}{2} \cdot \left[c_V \cdot \gamma^\mu - c_A \cdot \gamma^\mu \gamma^5\right]
\end{aligned}$$

$c_V = c_L + c_R$ und $c_A = c_L - c_R$ sind die Ladungen für vektorielle (γ^μ) und axialvektorielle ($\gamma^\mu\gamma^5$) Verknüpfungen. Es gilt:

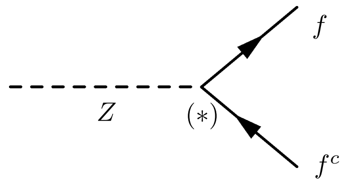
$$\left.\begin{matrix} c_L \\ c_R \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \cdot (c_V \pm c_A)$$

Die Kopplungskonstanten und Ladungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

		γ	$W^{\pm}$	Z^0
Kopplung	g	e	$\sqrt{2}g_w$	$g_w/\cos\theta_w$
Ladungen	c_L	Q	I^w	$I_3^w - Q\cdot\sin^2\theta_w$
	c_R	Q	0	$-Q\cdot\sin^2\theta_w$
	c_V	$2Q$	I^w	$I_3^w - 2Q\cdot\sin^2\theta_w$
	c_A	0	I^w	I_3^w

Das Photon trägt also nur zur Vektorkopplung bei. Die $W^{\pm}$-Bosonen tragen gleichmäßig zur Vektor- und Axialkopplung bei.

Beispiel 9.2



In diesem Vertex ist:

$$(*) = \frac{1}{2}\cdot\frac{g_w}{\cos\theta_w}\cdot\gamma^{\mu}\cdot(c_V^f - c_A^f\cdot\gamma^5) \quad\Rightarrow\quad |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{g_w^2}{\cos^2\theta_w}\cdot\left[(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2\right]$$

Für die Breite dieses Überganges gilt also:

$$\begin{aligned}\Gamma(Z\to ff^c) &= m_Z\cdot\tfrac{1}{48\pi}\cdot\tfrac{g_w^2}{\cos^2\theta_w}\cdot\left[(c_V^f)^2+(c_A^f)^2\right]\\ e &= g_w\cdot\sin\theta_w = \tfrac{m_Z}{12}\cdot\tfrac{\alpha_{em}}{\sin^2\theta_w\cdot\cos^2\theta_w}\cdot\left((c_V^f)^2+(c_A^f)^{2\prime}\right)\end{aligned}$$

Wir haben gesehen:

- Eine Mischung ist keine Vereinigung: $(g_W, g_Y)\to(e,\sin^2\theta_w)$
- Was noch nicht gezeigt wurde: Es gibt wie in der QCD auch Drei- und Vier-Bosonen-Kopplungen (die Drei-Boson-Kopplung wurde am LEP gemessen), zum Beispiel $\gamma/Z^0\to W^+ + W^-$, $Z+Z\to W^+ + W^-$ oder $W^+ + W^-\to W^+ + W^-$.
- Die Symmetrie fordert, dass die Massen aller Fermionen sowie der W- und Z-Bosonen verschwinden, da $m^2\cdot W^{\mu}W_{\mu}$ nicht eichinvariant gelöst. Dieses Problem wird durch das Higgs-Teilchen gelöst.
- Es gibt „schwache neutrale“ Ströme.

9.4 Geladene und neutrale Ströme der schwachen Wechselwirkung

Betrachtet werden Vorgänge wie:

$$n\to p^+ + e^- + \nu_e^c \qquad\text{oder}\qquad \mu^+\to e^+ + \nu_e + \nu_\mu^c$$

Wie wir bereits wissen, wurde durch Fermi zunächst ein Ladungstrom (genauer: ein ladungsändernder Strom) zwischen zwei unterschiedlich geladenen Zerfallsprodukten angenommen. 1961 stellte Glashow fest, dass das mit hochgeladenen Teilchen nicht funktioniert. Stattdessen haben wir ein Austauschteilchen W^- mit $n\to p^+ + W^-$ und $W^-\to e^+ + \nu_e^c$. Für den Propagator galt:

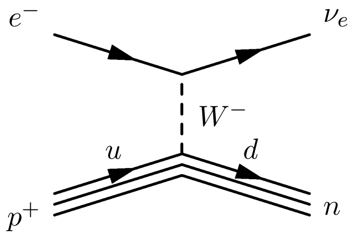
$$\text{Propagator}\sim\frac{1}{q^2-m_w^2}\approx-\frac{1}{m_w^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{g_w^2}{m_w^2}$$

Die Größe G_F ist messbar, die einzelnen Größen g_w und m_w aber nicht. Für die Zerfallsbreite gilt:

$$\Gamma \sim G_F^2 \cdot |q_{\max}|^5$$

Zum Beispiel ist beim Beta-Zerfall $|q_{\max}| = m_n - m_p = 1{,}3\,\mathrm{MeV}$, beim Myon-Zerfall hingegen gilt $|q_{\max}| = 106\,\mathrm{MeV}$. Dieser Energieunterschied führt zu einem exorbitanten Lebensdauerunterschied (890 s für Neutronen gegenüber $2\,\mu$s für Myonen).

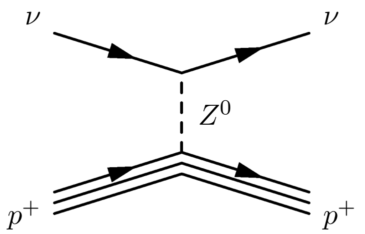
Anwendung auf Lepton-Nukleon-Streuung

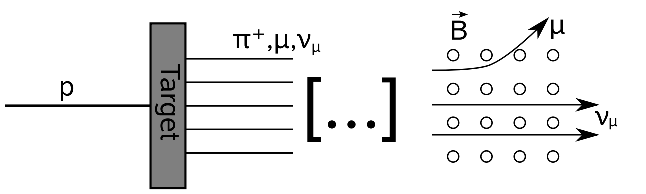


Wir haben also immer einen geladenen Strom. Galshow machte die Vorhersage, dass auch immer ein neutraler Strom (NC) existiert.

$$G^\mu_{NC} = \frac{1}{2} e^- \cdot (c^e_V \cdot \gamma^\mu - c^e_A \cdot \gamma^\mu \gamma^5) \cdot e^-$$

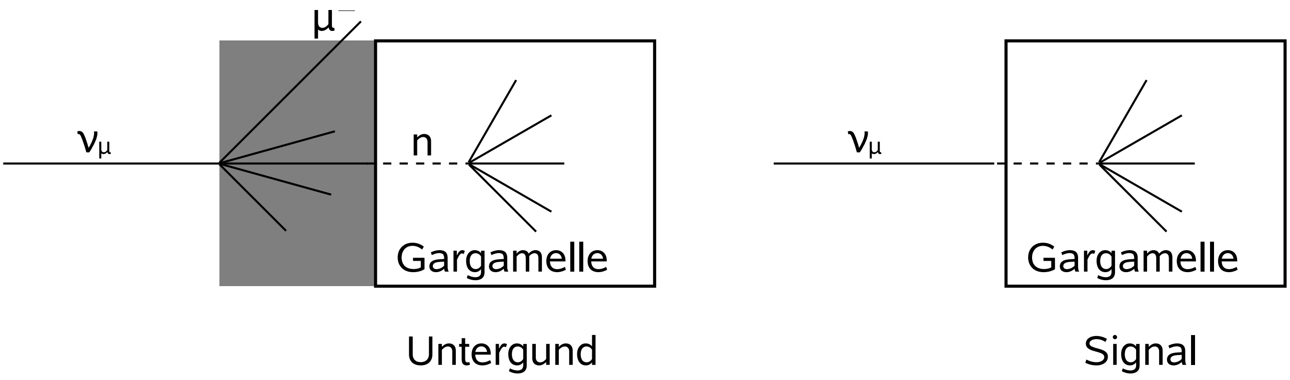
Glashow sagte außerdem voraus, dass diese Ströme aber nie den Flavour ändern können. Das kann man aber experimentell nicht überprüfen, weil der relevante Prozess (die Streuung von Elektronen an Protonen durch ein Z^0-Boson) von der elektromagnetischen Wechselwirkung völlig überdeckt wird. Die kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung beträgt $g_w / \cos\theta_w$ und die der elektromagnetischen Wechselwirkung $g_w \cdot \sin\theta_w$. Damit ist die Kopplungsstärke der elektromagntischen Wechselwirkung um einen Faktor 10 größer. Durch die Quadrierung des Propagators ergibt sich, dass die schwache Wechselwirkung 10^{-7} mal seltener ist als die elektromagnetische. Zum Nachweis muss man somit den folgenden Prozess nutzen:





Die Neutrinos erhält man aus dem Pion-Zerfall $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$. Man nimmt also einen hochenergetischen Protonenstrahl und beschießt ein Metalltarget. Nach der Kollision erhält man Pionen, die weiter zerfallen und damit einen Neutrinostrahl erzeugen. (Die ebenfalls entstehenden Myonen kann man durch ein Magnetfeld herausfiltern.) Das Ziel ist der Nachweis, dass nicht nur μ^- entstehen.

9.4.1 Das Gargamelle-Experiment von 1973



In der Gargamelle-Blasenkammer kann man die von Neutrinos ausgelösten Ereignisse zunächst nicht von von denen unterscheiden, die von bei der Streuung der Neutrions an Protonen entstehenden Neutronen ausgelöst werden. Aber: In beiden Fällen ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Wechselwirkung am Ort x stattfindet ist, von der Form:

$$P(x) \sim \mathrm{e}^{-x/\lambda_{\text{int}}}$$

Hierbei ist λ_{int} die hadronische Wechselwirkungslänge. Für Neutronen liegt sie bei 70 cm, bei Neutrinos im Bereich mehrerer Lichtjahre. Somit kann man die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Prozesse vergleichen, um Rückschlüsse darauf ziehen zu können, von welcher Teilchenart der entsprechende Schauer ausgelöst wurde. Experimentell beobachtete man die folgenden Wahrscheinlichkeitsverhältnisse: (hier aufgetragen mit ihrer erwarteten Abhängigkeit von θ_w)

$$\begin{aligned} R_\nu &= \frac{\sigma_{NC}(\nu_\mu+N\to\nu_\mu+X)}{\sigma_{CC}(\nu_\mu+N\to\mu^-+X)} = \frac{1}{2} - \sin^2\theta_w + \frac{20}{27}\sin^4\theta_w = 0{,}21 \pm 0{,}03 \\ R_{\nu^c} &= \frac{\sigma_{NC}(\nu_\mu^c+N\to\nu_\mu^c+X)}{\sigma_{CC}(\nu_\mu^c+N\to\mu^++X)} = \frac{1}{2} - \sin^2\theta_w + \frac{20}{9}\sin^4\theta_w = 0{,}45 \pm 0{,}09 \end{aligned}$$

Damit konnte man eine erste Abschätzung über $\sin^2\theta_w$ machen und damit auch über die Kopplungskonstante:

$$\sin^2\theta_w = 0{,}38 \pm 0{,}09 \quad \Rightarrow \quad m_w \approx 60\,\text{GeV}$$

Heute kennt man die folgenden Werte:

$$\sin^2\theta_w = 0{,}2315 \pm 0{,}0002 \quad \Rightarrow \quad m_w = 80{,}4\,\text{GeV}$$

9.4.2 Lepton-Nukleon-Streuung bei Hera

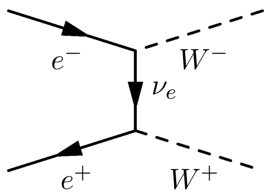
Am Hera wurden 30 GeV Elektronen auf 820 GeV Protonen geschossen.

- $e^- + p \to e^- + p$: neutraler elektromagnetischer Strom (Propagator $\sim 1/q^2$)
- $e^- + p \xrightarrow{W^-} \nu_e + n$: geladener schwacher Strom (Propagator $\sim 1/(q^2 - m_w^2)$)
- $e^- + p \xrightarrow{Z^0} e^- + p$: neutraler schwacher Strom (Propagator $\sim 1(q^2 - m_z^2)$)

9.5 Die Entdeckung der W- und Z-Bosonen

Die Z^0 zerfallen in sämtlich Fermion und Antifermionen. Also kann ich auch den Prozess umdrehen und mit einer Elektron-Positron-Vernichtung die Z^0 herstellen. Natürlich kann man auch einzelne Quarks nehmen, aber diese muss man aus Hadronen herausholen, also zum Beispiel Protonen aneinander streuen.

Die $W^\pm$ zerfallen in ein Lepton und ein entsprechendes Neutrino oder zwei unterschiedliche Quarks aus einer Familie. Allerdings kann man nicht so einfach einen Neutrinostrahl herstellen, daher muss man auch mit Elektron-Positron-Vernichtung (wie in der Skizze unten) oder mit Proton-Antiproton-Streuung arbeiten.



9.6 Spontane Symmetriebrechung im Standardmodell

9.6.1 Die Fermionmassen

Symmetrien erfordern masselose Teilchen. Die Masseerhaltung entstand etwa 10^{-10} s nach dem Urknall durch eine „spontane" Symmetriebrechung.

Alle Masse-Eigenzustände der Fermionen sind eine Summe von links- und rechtschiralen Anteilen:

$$f = f_L + f_R \quad \text{mit} \quad m_f \cdot \overline{(f_L + f_R)} \cdot (f_L + f_R) = m_f \cdot \overline{f}_L \cdot f_R + m_f \cdot \overline{f}_R \cdot f_L$$

Die einzelnen Masseterme transformieren sich aber unterschiedlich unter $SU(2)_L$. Zum Beispiel hat der zweite Summand im Masseterm für Leptonen die folgende Form:

$$m_L \cdot \overline{l_R} \cdot \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Vektor im Isospin-Raum und damit nicht $SU(2)_L$-invariant. Dies löst man durch Einfügung eines weiteren Isospin-Mechanismus:

$$g_f \bar{l}_R \cdot \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} \nu_l \\ l_l \end{pmatrix}$$

TODO: Hier fehlt was.

9.6.2 Der Higgs-Mechanismus

Ein minimales Modell enthält ein komplexwertiges $SU(2)$-Duplett ϕ und ein quadratisches Potential des Higgsfeldes $\phi^\dagger \phi$:

$$T(\phi) = (\mathrm{D}_\mu \phi) \cdot (\mathrm{D}^\mu \phi) \quad \text{und} \quad V(\phi) = -\lambda \cdot \nu^2 \cdot \phi^\dagger \phi + \lambda \cdot (\phi^\dagger \phi)^2$$

Damit ist der Grundzustand nicht bei $\phi_0 = (0,0)^T$, sondern bei:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h \end{pmatrix}$$

Wertet man die Gleichung $g_f \bar{l}_R (\phi^+, \phi_0)^T (\nu, l)_l^T$ aus, so erhält man den Masseterm.

$$m_f = \frac{1}{\sqrt{2}} g_f \cdot \nu$$

Anschaulich koppeln die Teilchen an das Higgs-Feld und erhalten dadurch eine Masse. Durch die Anregung des Higgs-Feldes ensteht ein Higgs-Boson mit einer Masse:

$$m_H = \sqrt{2\lambda} \cdot \nu$$

Da aber der Parameter λ nicht bekannt ist, lässt sich die Masse nicht verhersagen.

Das Higgshintergrundfeld bremst also die Teilchen, welche sich eigentlich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen würden, je nach der Stärke der Wechselwirkung mit diesem Hintergrundfeld (sprich: je nach Masse) ab. Ein Higgs-Teilchen ist eine quantenmechanische Anregung des Higgs-Hintergrundfeldes, die ein Higgs-Feld erzeugt. Ein Nachweis dieses Feldes, und damit auch des Hintergrundfeldes, kann nur über das Higgs-Teilchen erfolgen.

Vorhersagen des Higgs-Mechanismus für Eichbosonen

Die lokale Eichinvarianz für Higgs-Terme *erzwingt* eine Mischung des B- und W^3-Bosonenfeldes (Massendiagonalisierung).

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

Der kinetische Term $T = (\mathrm{D}_\mu \phi) \cdot (\mathrm{D}^\mu \phi)$ des Higgsfeldes enthält über

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\nu^2 + 2\nu h + h^2\right) \cdot \left(g_w^2 \cdot W_\mu^+ W^{-\mu} + (g_w^2 + g_Y^2) \cdot Z_\mu Z^\mu\right) \qquad \text{mit} \qquad g_w = \frac{e}{\sin\theta_w}$$

automatisch die Wechselwirkungen von Z-/W-Bosonen mit Hadronen. (Dies ist keine neue Wechselwirkung, sondern die bekannte Eichkopplung!) Für die Bosonen folgt die Masse also aus:

$$\begin{aligned} m_B &= \tfrac{1}{8} \cdot \nu^2 \cdot g_w^2 \cdot W_\mu^+ (W^-)^\mu \\ m_Z &= \tfrac{1}{8} \cdot \nu^2 \cdot \sqrt{g_w^2 + g_Y^2} \cdot Z_\mu Z^\mu \end{aligned}$$

Vergleich mit der Fermikopplung liefert:

$$\begin{aligned} m_W &= \tfrac{1}{2} \cdot g_w \cdot \nu \\ m_Z &= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{g_w^2 + g_\gamma^2} \cdot \nu \qquad \text{mit} \qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} \cdot G_F}} = 246\,\text{GeV} \\ m_\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Formel erhält man aus der niederenergetischen Näherung für den Myonzerfall:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8 m_w^2} = \frac{g_w^2}{8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot g_w \cdot \nu\right)^2} = \frac{1}{2\nu^2}$$

Weiterhin kann man eine Vorhersage für das Verhältnis m_W/m_Z machen:

$$\frac{m_W}{m_Z} = \frac{\frac{1}{2}\cdot g_w \nu}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{g_w^2+g_Y^2}} = \frac{(e/\sin\theta_w)^2}{e^2\cdot\sqrt{1/\sin^2\theta_w + 1/\cos^3\theta_w}} = \frac{1/\sin^2\theta_w}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta_w+\sin^4\theta_w}{\cos^2\theta_w\cdot\sin^2\theta_w}}} = \cos\theta_w$$

Diese Vorhersage ist numerisch sehr gut bestätigt und damit eine der zentralen überprüfbaren Vorhersagen des Higgs-Mechanismus.

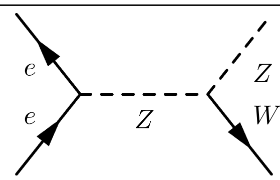
Ein W-Boson kann ein Higgs-Teilchen abstrahlen und wieder rekombinieren. Durch entsprechende Korrekturen höherer Ordnung kann man die Higgs-Masse indirekt eingrenzen:

$$m_W = m_Z\cdot\cos\theta_w + f\left(m_t^2, \ln\frac{m_H}{m_Z}\right) \quad\Rightarrow\quad m_H = (87+36-27)\ \text{GeV}$$

Eine andere Begrenzung ist die **Unitaritätsforderung**, die den Wirkungsquerschnitt der W-W-Streuung begrenzt:

$$m_W^2 \leq \frac{2\pi\cdot\sqrt{2}}{G_F} \approx (850\,\text{GeV})^2$$

Beispiel 9.3 Higgs-Suche am Large Electron Positron Collider (LEP)



Bei $\sqrt{s} = 208\,\text{GeV}$ ist die Masse, die man erreichen kann bei etwa $m_H \approx 708\,\text{GeV} - m_Z$.

Der Higgs-Mechanismus ermöglicht die CKM-Mischung von Flavors. Zum Beispiel für die Quarks ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} b' \\ s' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ s \\ d \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist fast diagonal ($V_{ud} = V_{cs} = V_{ts} \approx 0{,}97$). In der entsprechenden Neutrino-Mischungsmatrix U ist die Verteilung ein bisschen gleichmäßiger.

10 Gebundene Systeme

10.1 Bindung von Quarks

Neben Mesonen (zwei Quarks) und Barionen (drei Quarks) gibt es auch exotsche Zustände aus mehr Quarks (z.B. qqq^cq^c, qq^cg, $\ldots$). Die gebundenen Zustände sind *immer* farbneutral.

Das Potential der QCD innerhalb eines Mesons lautete:

$$V_{qq^c}(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + Kr \quad \text{mit} \quad K \approx 1\,\mathrm{GeV/fm}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Typische Bindungsabstände der QED (z.B. $e^+ - e^-$) sind 0,1 nm bei einer Energie von $-1/2\alpha^2 m_e \approx 13{,}6\,\mathrm{GeV}$, die Abstände der QCD liegen bei 0,1 fm bei einer Energie von $-1/2\alpha_S^2 M_q \approx 100\,\mathrm{MeV}$. Trotz der anderen Zahlenwerte sind die Spektren sehr ähnlich. Der große Unterschied ist die Spin-Spin-Wechselwirkung, da das Dipolfeld mit $1/r^2$ geht. Dies führt in der QED zu einer Aufspaltung in der Hyperfeinstruktur. Es ist die Aufsapltung wesentlich kleiner als die Bindungsenergie ($\Delta E_{HF} \approx SIe - 4eV \ll E_B$). In der QCD führt die Spin-Spin-Wechselwirkung jedoch zu einer Aufspaltung in der Größenordnung der Bindungsenergie ($\Delta E_{SS} \approx 100\,\mathrm{MeV} \approx E_B$).

Beispiel 10.1 Teilchen aus u und d^c

Ein Pion $\pi^+ = u(\downarrow)d^c(\uparrow)$ hat eine Masse $m_\pi = 140\,\mathrm{Mev}$. Dreht man den Spin des u, so erhält man ein $\varrho^+ = u(\uparrow)d^c(\uparrow)$ mit einer Masse von $m_\varrho = 770\,\mathrm{MeV}$.

10.1.1 Quantenzahlen. Starker Isospin

	Mesonen	**Baryonen**
Spin s	$0\ (\uparrow\downarrow)$ oder $1\ (\uparrow\uparrow)$	$\frac{1}{2}\ (\uparrow\uparrow\downarrow)$ oder $\frac{3}{2}\ (\uparrow\uparrow\uparrow)$
Drehimpuls l	$0, 1, 2, 3, \ldots$	
Gesamtspin J	$\lvert l-s\rvert \leq J \leq \lvert l+s\rvert$	
Parität $\mathbb{P}$	$\mathcal{P} = (-1)^{l+1}$	
C-Parität $\mathbb{C}$	$\mathbb{C} = (-1)^{l+s}$	—
Baryonzahl $\mathcal{B}$	$\mathcal{B} = 0\ (qq^c)$	$\mathcal{B} = +1\ (qqq)$ oder $\mathcal{B} = -1\ (q^cq^cq^c)$

Die **starke Hyperladung** errechnet sich aus:

$$Y^s := \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{B} + S + B + C + T)$$

Hierbei sind die hinteren vier Summanden die **Flavorness**. Der **starke Isospin** ergibt sich aus:

$$\boxed{I_3^s := Q - Y^s}$$

	d	u	s	c	b	t	d^c	u^c	s^c	c^c	b^c	t^c
Strangeness S			-1					+1				
Charme C				+1					-1			
Bottomness B					-1					+1		
Topness T						+1					-1	
Y^s	$1/6$	$1/6$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/6$	$-1/6$	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$
I_3^s	$-1/2$	$1/2$	0	0	0	0	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0

Der starke Isospin ist nur für Masse-Eigenzustände definiert, während die schwache Isospin-Ladung auf den Eigenzuständen der schwachen Wechselwirkung, also für Quark-Dupletts wie $(u, d')_L$, definiert ist. Der starke Isospin ist nur ein Ordnungsparameter, es existiert keine entsprechende Ladung (und damit auch keine passende Eichsymmetrie). Wie der Name vermuten lässt, gehorcht der starke Isospin der Symmetriegruppe $SU(2)$. Die folgende Tabelle fasst all diese Größen für einige Hadronen zusammen:

	m/MeV	Q	S	$\mathcal{B}$	Y^S	I_3^S
$p(uud)$	938,3	$+1$	0	$+1$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$n(udd)$	939,6	0	0	$+1$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\Sigma^+(uus)$		$+1$	-1	$+1$	0	$+1$
$\Sigma^0(uds)$		0	-1	$+1$	0	0
$\Sigma^-(dds)$		-1	-1	$+1$	0	-1

Die Massen von Proton und Neutron sind fast identisch, da sich u und d bzgl. starker Wechselwirkung identisch verhalten. Die Symmetrie ist nur *leicht* gebrochen, da die Massen der Quarks sowie deren Ladungen leicht unterschiedlich sind ($m_u \approx 2\,\mathrm{MeV} \neq m_d \approx 5\,\mathrm{MeV}$), was in kleinen Unterschieden in der Bindungsenergie resultiert.

Da also eine gewisse Symmetrie im starken Isospin vorliegt, ist laut Noether-Theorem der starke Isospin eine Erhaltungsgröße unter der starken Wechselwirkung. Dieses Prinzip nutzt man zum Beispiel beim Zerfall $\varrho \to \pi\pi$ aus. Alle diese Teilchen ($\varrho^\pm, \varrho^0, \pi^\pm, \pi^0$) haben einen Isospin $I^S = 1$. Man weiß, dass die Zerfallsbreiten $\Gamma_{\varrho^+} = \Gamma_{\varrho^0} = \Gamma_{\varrho^-}$ identisch sein müssen. Dabei gibt es die folgenden Zerfälle:

Ausgangsteilchen	ϱ^+	ϱ^0		ϱ^-
Zerfallsprodukte	$\pi^+\pi^0$	$\pi^+\pi^-$	$\pi^0\pi^0$	$\pi^-\pi^0$
Relative Häufigkeit	1	x	$1-x$	1

Die Häufigkeiten der Zerfallsprodukte lauten also:

$$\begin{aligned} \pi^+ &: \quad 1+x \\ \pi^0 &: \quad 2\cdot x \\ \pi^- &: \quad 1+x \end{aligned}$$

Diese Häufigkeiten müssen aufgrund der Isospinerhaltung aber gleich groß sein, somit ist $x = 1$ und der Übergang $\varrho^0 \to \pi^0\pi^0$ verboten. Dieses Verhalten kann man auch mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten herleiten. Diese beschreiben für Prozesse $(J, m) \to (J_1, m_1) + (J_2, m_2)$ relative Verzweigungsverhältnisse. Der Tabellenwert für den Übergang $\varrho^0 \to \pi^0\pi^0$ – also $(1,0) \to (1,0) + (1,0)$ – so erhält man eine Häufigkeit von Null.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Spektroskopische Ordnung von u-/d-/s-Mesonen.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Multiplettordnung von u-/d-/s-Mesonen.

Der starke Isospin hilft auch bei der Sortierung der Hadronen. Bei der spektroskopischen Ordnung ordnet man bestimmten Isospins I^s bestimmte Mesonen qq^c zu. Ordnet man die Hadronen als Multipletts, so liegen bei $I_3^s = Y^s = 0$ einige Überlagerungen von qq^c-Mesonen:

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (uu^c - dd^c) \\ \eta &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (uu^c + dd^c - ss^c) \\ \eta' &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (uu^c + dd^c + 2ss^c) \end{aligned}$$

10.1.2 Massen der Hadronen

Quarks sind in Hadronen von Gluonenwolken umgeben. Diese Wolke trägt vor allem bei u-, d- und s-Quarks beträchtlich zur Masse bei, was durch die **Konstituentenmasse**, den Masseanteil eines Quarks in einem Hadron, zum Ausdruck kommt:

$$M_q = m_q + (300\ldots350)\ \mathrm{MeV} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} m_u &= 2\,\mathrm{MeV} \\ m_d &= 5\,\mathrm{MeV} \\ m_s &= 160\,\mathrm{MeV} \\ m_c &= 1300\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Bei der Hadronenmasse kommt noch eine Korrektur durch die Spin-Spin-Wechselwirkung hinzu:

$$\boxed{M = \sum_q M_q + \Delta M_{ss}}$$

Für Mesonen ergibt sich mit der obigen Formel zum Beispiel:

$$\boxed{M = M_1 + M_2 + 4 \cdot \frac{M_u^2}{M_1 \cdot M_2} \cdot \langle s_1 \cdot s_2 \rangle \cdot 160\,\mathrm{MeV}}$$

Mit $M_1 = M_d = 310\,\mathrm{MeV}$ und $M_2 = M_s = 480\,\mathrm{MeV}$ und

$$\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \cdot \left[(s_1 + s_2)^2 - s_1^2 - s_2^2 \right] \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } s = 1 \\ -\frac{3}{4} & \text{für } s = 0 \end{cases}$$

kann man z.B. die Masse des Pions ausrechnen:

$$m_\pi = 310\,\mathrm{MeV} + 310\,\mathrm{MeV} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \cdot 160\,\mathrm{MeV} = 140\,\mathrm{MeV}$$

Für ein Kaon ergibt sich äquivalent $m_K = 480\,\mathrm{MeV}$.

10.2 Die Bindung der Nukleonen

Zunächst wollen wir das vorhandene Wissen zu den Kernen zusammenfassen:

- Formfaktoren der Kerne bei elastischer Streuung:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \cdot \left(e^- + {}^A_Z\mathrm{X} \to e^- + {}^A_Z\mathrm{X}\right) = \left|F(q^2)\right|^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}}$$

  Die Mott-Streuung entspricht der Streuung an punktförmigen Targets. Aus $\left|F(q^2)\right|$ kann man mit einer Fourieranalyse auf die Kernladungsverteilung $\varrho(r)$ schließen. Die Kernladungsverteilung erklärt auch den hohen Anteil von Neutronen in schweren Kernen: Befinden sich viele Protonen im Kern, so erhöhen Neutronen den Abstand der Protonen voneinander und stabilisieren das System so, da die Protonen im Coulomb-Potential niedriger liegen.

  GRAPHIK

  (wird nachgereicht)

  Kernladungsverteilung

  Man kann die Kernform anschaulich durch eine Kugel annähern. Für den **effektiven Radius** dieser Kugel findet man empirisch den folgenden Zusammenhang:

$$R = R_0 \cdot A^{1/3} = 1{,}21\,\mathrm{fm} \cdot A^{1/3}$$

  Daraus folgt, dass die Nukleonendichte in allen Kernen gleich ist ($V \sim R^3 \sim A$). Weiter stellt man fest, dass sich die Nukleonen sich nicht gegenseitig durchdringen können. Zudem muss es eine außerordentlich starke Abstoßung für kleine Abstände geben.

- Aus dem Quark-Confinement der Quantenchromodynamik folgt, dass alle Nukleonen farbneutral sind. Somit gibt es keine starke Wechselwirkung in großen Abständen (Reichweite der Bindung liegt bei 1,5 fm).

- Es muss ein anziehendes Potential existieren, dass die Nukleonen zu Kernen bindet, aber verhindert, dass sie sich so nahe kommen, dass Quarkreaktionen stattfinden.

Das erwartete Nukleonpotential ist von der Form her ähnlich zu dem der Molekülbindung der Atomphysik. Die Effekte in den Kernen lassen sich also mit den Effekten der Molekülbindung vergleichen: Zum Beispiel gilt für kleine Atomabstände, dass sich die Fermionen e^- nach dem Pauliverbot bei der Überlappung der Elektronhüllen richten.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Form des Kernpotentials

Es gibt verschiedene Arten von Molekülbindungen: Ionenbindung, Dipolbindung (van-der-Waals-Bindung) über Austausch zweier Photonen und die kovalente Bindung durch die Überlappung von Elektronenorbitalen. Genauso wie in der Kernphysik gibt es keine Molekülbindungen mit großen Reichweiten, weil ein Atom nach außen hin neutral ist. Wir fragen uns nun, welche Kräfte in der Kernphysik für Anziehung und Abstoßung verantwortlich sind.

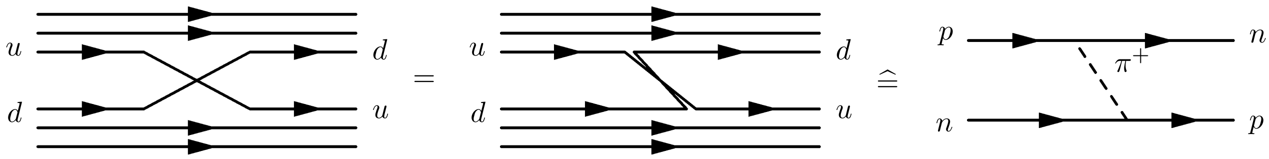
Eine Abstoßung nach dem Pauliprinzip ist hier nicht möglich, da wir im Kern zwölf unterschiedliche Quantenzahleneinstellungen haben:

$$(u, d) \otimes (\upharpoonleft, \downharpoonleft) \otimes (r, g, b) = 12$$

Verantwortlich für die Abstoßung ist der starke Spin-Spin-Beitrag V_{ss}. Zum Beispiel hat das Teilchen $\varrho(\uparrow\uparrow)$ eine Energie von 770 MeV, während das sich lediglich in der Spineinstellung unterscheidende $\pi(\uparrow\downarrow)$-Teilchen nur 140 MeV gebunden hat.

Ein Äquivalent zur Ionenbindung kann es aufgrund des Confinements nicht geben, da hier zum Beispiel ein Proton und ein Quark auf einen Abstand von etwa 1 fm gebracht werden müssten. Eine dipolartige Bindung über den Austausch zweier Gluonen ist sehr wohl möglich, allerdings ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Vorgang viel zu gering.

Es verbleibt also die kovalente Bindung. Dabei überlappen sich die Nukleonen so, dass sich nur einige Quarks in der Überlappungszone befinden. Als Feynmandiagramm lässt sich der Prozess wie folgt darstellen:



Die Bindung findet also effektiv über den Austausch von *Mesonen* statt. Diese Beschreibung wird nach ihrem geistigen Vater als **Yukawa-Kopplung** bezeichnet. Er hat zudem schon den π Propagator gekannt, indem er sich über das Potential Gedanken gemacht hat und dann in den Ortsraum mittels Fouriertransformation übergegangen ist.

Yukawa-Kopplung

$$V_{\text{Yuk}} = -g_\pi \cdot \frac{\mathrm{e}^{-m_\pi \cdot r}}{r} = -g_\pi \cdot \frac{\mathrm{e}^{-r/\lambda}}{r} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{m_\pi} = 1{,}5\,\text{fm}$$

λ ist die Reichweite der Kernkraft. Weiterhin kann man damit das Pion und seine Masse voraussagen:

$$m_\pi = \frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{200\,\text{MeV} \cdot \text{fm}}{1{,}5\,\text{fm}} \approx 140\,\text{MeV}$$

Lange Zeit (1937-1947) gab es Diskussionen, da man zwei Teilchen (Pion und Myon) gefunden hatte, die man aufgrund ähnlicher Massen ($100\,\text{MeV} < m_\pi, m_\mu < 200\,\text{MeV}$) für dasselbe Teilchen hielt. Die damit vorliegende effektive Beschreibung ist nötig, da die Störungstheorie über die QCD wegen $\alpha_s(q^2 \approx m_\pi^2) \approx 1$ nicht konvergiert. Stattdessen erfolgt die Bestimmung der Bindungsenergien $B(Z, A)$ über die Messung der Atommassen in Massenspektrometern:

$$B(Z, A) = Z \cdot m_p + \underbrace{(A - Z)}_{=N} \cdot m_n + Z \cdot m_e - M(A, Z)$$

Es ist M die Atommasse.

10.2.1 Bindung des Deuterons

Ein Deuteriumatom ${}^2_1H$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$S = 1 \quad \text{und} \quad J^P = 1^+ \quad \Rightarrow \quad l = 0$$

Seine Bindungsenergie beträgt:

$$B = m_p + m_n + m_e - m_D = -2{,}225\,\text{MeV}$$

Warum ist die Bindungsenergie im MeV-Bereich? Betrachten wir dazu die Energie einer Proton-Elektron-Bindung:

$$B = -13\,\mathrm{eV} = -\frac{1}{2}\alpha_{em}^2 \cdot m_e = -\frac{1}{2} \cdot \alpha_\pi^2 \cdot m_N/2 \quad \text{mit} \quad \alpha_\pi = \frac{g_\pi^2}{4\pi} \approx 1$$

Es zeigt sich, dass $\alpha_\pi \approx 1$ nicht funktioniert. Wenn man allerdings $\alpha_\pi \approx 0{,}1$ annimmt, scheint die Größenordnung korrekt zu sein.Das magnetische Moment erhält man nun aus:

$$\mu_D = 0{,}857\mu_n = \mu_p + \mu_n - 0{,}022\mu_N \approx \mu_p + \mu_n \quad \text{wegen} \quad l = 0$$

Man würde einen weiteren Beitrag von $l = 2$ erhalten, der allerdings vernachlässigbar ist.

Betrachten wir das Potential:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_c(r) & \text{Zentralpotential} \\ +V_{ss}(r) \cdot \vec{s}_1\vec{s}_2 & \text{Spin-Spin-WW} \\ +V_{s0}(r) \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{l} & \text{Spin-Orbit-WW} \\ +V_T(r) \cdot \left(\frac{3\cdot(\vec{s}_1\vec{r})\cdot(\vec{s}_2\vec{r})}{r^2} - \vec{s}_1\vec{s}_2\right) & \text{Tensorpotential} \end{cases}$$

Wegen der I^s-Symmetrie gibt es keinen gebundenen pp bzw. nn-Zustand, und das Pauli-Prinzip verbietet gebundene pp- bzw. nn-Zustände mit $s = 1$.

Wie wir sehen, ist schon die exakte Beschreibung des Deuterons relativ komplex. Man muss also Kernmodelle (Vielteilchenmodelle) verwenden, um verschiedene Beobachtungen zu beschreiben, unter anderem:

- Abhängigkeit der Bindungsenergie B bei verschiedenen Massenzahlen A
- Kernzerfälle
- Kernanregungen
- Drehimpuls J
- magnetisches Moment μ

Dazu gibt es verschiedene Modelle:

- Tröpfchenmodell
- Fermi-Gas-Modell
- Einteilchen-Schalenmodell
- kollektives Modell

Keines dieser Modelle stimmen mit allen Beobachtungen überein, sie liefern jedoch gute Einblicke in die Vorgänge.

10.2.2 Tröpfchenmodell

Diese Modell wurde schon 1935 von Bethe und Weizsäcker entwickelt. Es liefert zum Beispiel die **Weizsäcker-Massenformel**, dass die in der Masse des Kerns auftauchende Bindungsenergie genauer beschreibt.

$$M(A,Z) = N \cdot m_n + Z \cdot m_p + Z \cdot m_e - B(A,Z)$$

Hierbei ist die Bindungsenergie immer positiv definiert. Definiert man sie negativ, so wird sie häufig Massenüberschuss bezeichnet $\Delta M = -B$. Die Weizsäcker-Massenformel ergibt nun:

$$B(A,Z) = a_v \cdot A - a_s \cdot A^{2/3} - a_c \cdot \frac{Z \cdot (Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \cdot \frac{(N-Z)^2}{4A} - \frac{\delta_p}{A^{1/2}}$$

Die Terme beschreiben in dieser Reihenfolge die Energie im Inneren des Kernvolumens („volume“), die fehlende Bindungsenergie der Oberfläche des Kerns („surface“), die elektromagnetische Abstoßung („coulomb“), sowie Asymmetrie und Paarung der Neutronen und Protonen („asymmetry“, „pairing“):

$$\begin{aligned} a_v &\approx 16\,\mathrm{MeV} \\ a_s &\approx 17\,\mathrm{MeV} \\ a_c &\approx 0{,}7\,\mathrm{MeV} \\ a_a &\approx 93\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \delta_p = \begin{cases} -11\,\mathrm{MeV} & N \text{ und } Z \text{ gerade} \\ 11\,\mathrm{MeV} & N \text{ und } Z \text{ ungerade} \\ 0\,\mathrm{MeV} & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung, kann man sich den Kern als Tropfen mit konstanter Dichte vorstellen. Ähnlich wie bei der Oberflächenspannung des Wassers gibt es hier Oberflächeneffekte. Weiterhin kann man den Tropfen deformieren (das steckt allerdings nicht in der Weizsäcker-Massenformel). Der Unterschied zum Wassertropfen ist, dass die Teilchen im Kern eine große freie Weglänge haben, ähnlich wie in einem Gas. Außerdem gibt es diskrete Anregungsenergien wie in der Quantenmachanik.

Damit werden die Terme in der Weizsäcker-Massenformel anschaulich:

- Volumenterm: Die Bindung erfolgt nur an die nächsten Nachbarn. Das heißt, jedes Nukleon hat im Wesentlichen die selbe Bindungsenergie. Hieraus folgt weiterhin $R^3 \sim V \sim A$.
- Oberflächenterm: An der Oberfläche „fehlen“ einige Nachbarn. Die Oberfläche ist proportional zu R^2, also ist dieser Term $\sim A^{2/3}$.
- Coulombterm: In einem „elektrisch geladenen Tröpfchen“ stoßen sich die Protonen paarweise ab. Damit bekommt $\binom{Z}{2} = Z(Z-1)/2$ man Paare, die einen mittlere Abstand von $\langle R_{pp} \rangle = 5/6R$ haben. Die Energie der Coulombabstoßung ist damit:

$$E_c = \frac{3}{5} \cdot \alpha \cdot \frac{Z \cdot (Z-1)}{R} \sim \frac{1}{A^{1/3}}$$

- Asymmetrieterm: Für die anschauliche Betrachtung ziehen wir die Quantenmechnik zu Rate und betrachte den Kern als Potentialtopf, der für Protonen und Neutronen getrennt ist. Jedes Niveau kann man sowohl mit einem $\upharpoonright$- oder $\downharpoonleft$-Neutron als auch mit einem $\upharpoonright$- oder $\downharpoonleft$-Proton besetzen. Es ist natürlich energetisch günstiger, die Neutronen und Protonen symmetrisch aufzufüllen, also ist $N = Z$ bevorzugt. Dieser Term ist damit ein „Gegenspieler" zum Coulombterm, da dieser möglichst ein Proton und beliebig viele Neutronen möchte. In großen Kernen wird ein Mittelweg eingeschlagen, dann ist $N \approx 1{,}5 \cdot Z$.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Zum Asymmetrieterm

- Auch den Paarungsterm erklärt man am besten mit dem Topfmodell.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Im linken Fall liegen die obersten zwei Nukleonen in unterschiedlichen Orbitalen, also fern voneinander. Rechts sind die beiden Nukleonen im selben Orbital und sich deswegen nah. Da Nukleonen primär anziehend wechselwirken, wird der letztere Fall bevorzugt (im Gegensatz zur Hundtschen Regel der Atomhülle).

Insgesamt beschreibt das Modell den generellen Verlauf der Bindungsenergie in Abhängigkeit von der Massenzahl sehr gut. Es gibt allerdings leichte Sprünge in der Kurve bei bestimmten Massezahlen, die vom Tröpfchenmodell nicht beschrieben werden.

Die Folge dieses Verhaltens ist, dass man für $A = \text{const.}$ (Isobare) einen parabolischen Verlauf der Bindungsenergie $B(Z) = \alpha + \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2$ erhält (bis auf die Verschiebungen durch die Paarungsenergie). Aus dem Diagramm kann man drei Prozesse ablesen:

$$\begin{array}{rrcll} \beta^- : & n & \rightarrow & p^+ + e^- + \nu_e^c & \\ \beta^+ : & p^+ & \rightarrow & n + e^+ + \nu_e & \text{für} \quad \Delta B > m_e \\ \text{K-Einfang:} & p^+ + e^- & \rightarrow & n + \nu_e & \end{array}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Zum Beta-Zerfall

Der Begriff **K-Einfang** ist dadurch begründet, dass das eingefangene Elektron aus der K-Schale stammt.

10.2.3 Fermi-Gas-Modell

Eine Verbesserung der Vorhersage von quantenmechanischen Effekten ermöglicht das Fermi-Gas-Modell: Jedes Nukleon wird als quasifrei im Potential der anderen $A - 1$ Nukleonen angenommen. Die entstehenden zwei Potentialtöpfe werden bis zur Fermikante aufgefüllt.

Jedes Teilchen nimmt ein Volumen von $(2\pi\hbar)^3$ im Phasenraum ein. Die Zahl der Teilchen im örtlichen Volumen V mit $p \in [p, p + \mathrm{d}p]$ ist:

$$\mathrm{d}n = \frac{V \cdot 4\pi p^2 \, \mathrm{d}p}{(2\pi\hbar)^3} = n(p) \cdot \mathrm{d}p$$

Die Gesamtzahl der Teilchen ergibt sich aus der Integration und Berücksichtigung der unterschiedlichen Spins:

$$n = 2 \cdot \int_0^{p_F} n(p)\,\mathrm{d}p \quad \Rightarrow \quad N = \frac{V}{2\pi^3 \cdot \hbar^3} \cdot (p_F^n)^3 \quad \text{und} \quad Z = \frac{V}{2\pi^3 \cdot \hbar^3} \cdot (p_F^p)^3$$

Für eine Abschätzung der Größenordnung nehmen wir den symmetrischen Fall $N = Z = A/2$. Mit dem Volumen $V = 4\pi/3 \cdot R_0^2 \cdot A$ ($R_0 = 1{,}2\,\mathrm{fm}$) ergibt sich:

$$p_F = p_F^p = p_F^n = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{8}} \cdot \frac{\hbar}{R_0} \approx 250\,\mathrm{MeV}$$

Diese und die folgende Abschätzung ist vollkommen unabhängig von A. Mit Hilfe der Fermienergie $E_F = p_F^2/2m_N = 33\,\mathrm{MeV}$ kann man auf die Potentialtiefe schließen:

$$V_0 = E_F + \langle B/A \rangle \approx 41\,\mathrm{MeV}$$

Um herauszufinden, ob es in diesem Modell auch einen Assymetrieterm gibt, betrachten wir die kinetische Energie:

$$E_{\mathrm{kin}}(N,Z) = N \cdot \langle E_{\mathrm{kin}}^n \rangle + Z \cdot \left\langle E_{\mathrm{kin}}^p \right\rangle$$

Die Mittelwertbildung erfolgt über die Integration über die Impulskugel:

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{\mathrm{kin}} \cdot p^2\,\mathrm{d}p}{\int_0^{p_F} p^2\,\mathrm{d}p} = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_F^2}{2m_n}$$

Beachtet man noch $n \sim A \cdot R_0^3 \cdot p_F^3$, kann man schreiben:

$$E_{\mathrm{kin}}(N,Z) = \frac{3}{10m_n} \cdot \left[N \cdot (p_F^n)^2 + Z \cdot (p_F^p)^2\right] \sim \frac{1}{R_0^2} \cdot \frac{N^{5/3} - Z^{5/3}}{A^{3/2}}$$

Daraus erkennt man ein Minimum bei $N = Z$. Wir führen nun eine Taylorentwicklung um das Minimum aus ($\Delta = (N-Z)/A$):

$$E_{\mathrm{kin}}(N,Z) \sim \frac{A}{R_0^2} \cdot \left[1 + \frac{5}{9} \cdot \frac{(N-Z)^2}{A^2} + \dots\right]$$

Diese beiden Terme entsprechen dem Volumen- und dem Asymmetrieterm.

Stichwortverzeichnis