# Theoretische Elektrodynamik

(Kompendium)

Herausgegeben von

AGeS Die Skript-Spezialisten

Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

# Inhaltsverzeichnis

Im gesamten Kompendium wird das Gauss'sche Maßsystem verwendet.

## Grundgrößen

- Ladungsdichte $\varrho(\vec{r},t)$ und Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r},t) = \varrho \cdot \vec{v}$
- elektrisches und magnetisches Feld: $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$
- Lorentz-Kraft: $\vec{K} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\vec{v}\times\vec{B}\right)$, Kraftdichte: $\vec{k} = \varrho\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\vec{j}\times\vec{B}$

## Maxwellgleichungen im Vakuum

| | |
|---|---|
| $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ | Faradaysches Induktionsgesetz |
| $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\cdot\varrho$ | Gaußsches Durchflutungsgesetz |
| $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{\jmath}$ | Durchflutungsgesetz von Oersted und Ampère |
| $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ | Ausschluss magnetischer Monopole |

## Ausgewählte Folgerungen

- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$
- in einer Leiterschleife induzierte Spannung: $U_{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{f} = \oint_{C(S)}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\vec{v}\times\vec{B}\right)\,\mathrm{d}\vec{r}$

## Erhaltungssätze

- Energiebilanz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V w\,\mathrm{d}V + \iiint_V \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = -\oiint_{S(V)}\vec{S}\,\mathrm{d}\vec{f}$
- Impulsbilanz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{elm}}\right) = \sum_{i,k}\vec{e}_i\cdot\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ik}\,\mathrm{d}V = \sum_{i,k}\vec{e}_i\cdot\oiint_{S(V)}T_{ik}\cdot\left(\vec{e}_k\cdot\mathrm{d}\vec{f}\right) = \oiint_{S(V)}\vec{t}\,\mathrm{d}f$
- Drehimpulsbilanz: $\iiint_V\left(\vec{r}\times\vec{k}\right)\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V\left(\vec{r}\times\frac{\vec{S}}{c^2}\right)\mathrm{d}V = \oiint_{S(V)}\left(\vec{r}\times\vec{t}\right)\mathrm{d}f$

  Hierbei sind:
- $w = \frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi}$ die Energiedichte des elektrischen und magnetischen Feldes
- $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\cdot\vec{E}\times\vec{B}$ der Poynting-Vektor
- $\vec{p}_{\text{mech}}$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\text{mech}} = \iiint_V\vec{k}\,\mathrm{d}V$ der mechanische Impuls
- $\vec{p}_{\text{elm}} = \frac{1}{c^2}\cdot\iiint_V\vec{S}\,\mathrm{d}V$ der elektromagnetische Impuls
- $\overleftrightarrow{T}$ der Maxwellsche Spannungstensor mit den Komponenten $T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(E_iE_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{E}^2 + B_iB_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{B}^2\right)$
- $\vec{t} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left[\vec{E}\cdot\left(\vec{E}\cdot\vec{e}_f\right) - \frac{1}{2}\vec{E}^2\cdot\vec{e}_f + \vec{B}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{e}_f\right) - \frac{1}{2}\vec{B}^2\cdot\vec{e}_f\right]$ mit dem Flächennormaleneinheitsvektor $\vec{e}_f$

# Elektromagnetische Potentiale

- Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ und skalares („elektrostatisches“) Potential $\varphi(\vec{r},t)$
- magnetisches Feld: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$
- elektrisches Feld: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

# Eichtransformationen

- transformiertes Vektorpotential: $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda(\vec{r},t)$
- transformiertes Skalarpotential: $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)$

  Die Potentiale müssen den folgenden Bedingungen genügen:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\cdot\vec{\jmath}$$
$$\Delta\varphi + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -4\pi\varrho$$

- Lorenz-Eichung: $\vec{A}', \varphi'$ mit Eichbedingung: $\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi' = 0$
- Coulomb-Eichung: $\vec{A}', \varphi'$ mit Eichbedingung: $\operatorname{div}\vec{A}' = 0$

| | **Eichfunktion** | **Potentiale** |
|---|---|---|
| Lorenz-Eichung | $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = -\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)$ | $\Delta\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}' = -\frac{4\pi}{c}\cdot\vec{\jmath}$<br>$\Delta\varphi' - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi' = -4\pi\varrho$ |
| Coulomb-Eichung | $\Delta\Lambda = -\operatorname{div}\vec{A}$ | $\Delta\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}' - \frac{1}{c}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial t}\varphi' = -\frac{4\pi}{c}\cdot\vec{\jmath}$<br>$\Delta\varphi' = -4\pi\varrho$ |

# Greensche Funktion

- Problem: Suche $\Psi$ in $L(x_1,\ldots,x_n)\cdot\Psi(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$ mit dem Differentialoperator

$$L(x_1,\ldots,x_n) = a + \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i - x_{q,i})} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot\frac{\partial^2}{\partial(x_i - x_{q,i})\partial(x_j - x_{q,j})} + \ldots$$

- Greensche Funktion:

$$G(x_1,\ldots,x_n) = G_0(x_1,\ldots,x_n) + \frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_n\cdot\frac{\mathrm{e}^{i\cdot\sum_l k_l x_l}}{a + i\cdot\sum_l a_l\cdot k_l - \sum_{l,m} a_{lm}\cdot k_l k_m + \ldots}$$

  Hierbei löst $G_0(x_1,\ldots,x_n)$ die Differentialgleichung $L\cdot G_0 = 0$.

- Lösung:

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n) = \Psi_0(x_1,\ldots,x_n) + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1'\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_n'\cdot G(x_1 - x_1',\ldots,x_n - x_n')\cdot f(x_1',\ldots,x_n')$$

  Hierbei löst $\Psi_0(x_1,\ldots,x_n)$ die Differentialgleichung $L\cdot\Psi_0 = 0$.

# Bestimmung von Vektorfeldern

- Problem: Suche $\vec{F}(\vec{r})$ für gegebenes $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})$ und $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})$.
- Lösung:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_{\text{hom}}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\mathrm{d}^3r'\cdot\frac{\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}') + \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

  Hierbei berücksichtigt die homogene Lösung $\vec{F}_{\text{hom}}(\vec{r})$ mit $\operatorname{div}\vec{F}_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{F}_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0$ eventuelle Rand- und Anfangsbedingungen.

# Punktladung

*Situation:* einzelne Punktladung $q$ am Ort $\vec{r}_q$

- Potential: $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$
- elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3}$
- mehrere Punktladungen $\to$ Coulomb-Wechselwirkung: $W_w = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{\alpha\neq\beta} \frac{q_\alpha \cdot q_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$

# Elektrischer Dipol

*Situation:* Anordnung zweier entgegengesetzer gleichgroßer Punktladungen $-q$ (am Ort $\vec{r}_d$) und $+q$ (am Ort $\vec{r}_d + \vec{a}$); Übergang zu $q \to \infty$ und $|\vec{a}| \to 0$ derart, dass das Dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{a}$ konstant bleibt

- Ladungsverteilung: $\varrho(\vec{r}) = \lim\limits_{q\to\infty,\, \vec{a}\to 0} q \cdot [\delta(\vec{r} - (\vec{r}_d + \vec{a})) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_d)] = -\vec{p} \cdot \operatorname{grad}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_d)$
- Potential: $\varphi(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \operatorname{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_d|} = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_d)}{|\vec{r}-\vec{r}_d|^3}$
- elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = 3 \cdot \frac{[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_d)]\cdot(\vec{r}-\vec{r}_d)}{|\vec{r}-\vec{r}_d|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_d|^3}$
- mehrere Dipole $\to$ Dipoldichte: $\vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$
- (Gesamt)Dipolmoment: $\vec{p} = \iiint \vec{P}(\vec{r})\, \mathrm{d}V = \iiint \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\, \mathrm{d}V$

# Elektrischer Quadrupol

*Situation:* Anordnung zweier entgegengesetzt ausgerichteter Dipole $-\vec{p}$ (am Ort $\vec{r}_q$) und $\vec{p}$ (am Ort $\vec{r}_q + \vec{d}$); Übergang zu $|\vec{p}| \to \infty$ und $|\vec{d}| \to 0$ derart, dass die Komp. des Q.momentes $q_{ij} = d_i \cdot p_j$ konstant bleiben

- Quadrupolmoment: $q_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \iiint \varrho(\vec{r}) \cdot x_i \cdot x_j\, \mathrm{d}V$
- Quadrupoltensor: $Q_{ij} = 3 \cdot q_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sum\limits_{l=1}^{3} q_{ll} = \frac{1}{2} \iiint \varrho(\vec{r}) \cdot \left[3x_i \cdot x_j - |\vec{r} - \vec{r}_q|^2 \cdot \delta_{ij}\right] \mathrm{d}V$

  *Beachte:* Quadrupolmoment und -tensor sind symmetrisch, Spur von $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ verschwindet
- Ladungsverteilung: $\varrho(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \left[\operatorname{grad}_r \delta(\vec{r} - (\vec{r}_q + \vec{d})) - \operatorname{grad}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_q)\right] = \sum\limits_{i,j} q_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$
- Potential: $\varphi(\vec{r}) = \sum\limits_{i,j} q_{ij} \cdot \left[\frac{3(x_i - x_{q,i})\cdot(x_j - x_{q,j})}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3}\right] = \sum\limits_{i,j} Q_{ij} \cdot \frac{(x_i - x_{q,i})\cdot(x_j - x_{q,j})}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^5}$

# Allgemeine ruhende Ladungsverteilung

- Potential: $\varphi(\vec{r}) = \iiint \mathrm{d}^3 r' \cdot \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \varphi_{\text{hom}}(\vec{r})$
- elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = \iiint \mathrm{d}^3 r' \cdot \frac{\varrho(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + \vec{E}_{\text{hom}}(\vec{r})$
- Verschiebungsarbeit: $A = -\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q \cdot [\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)]$ für eine Probeladung $q$ von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$
- Wechselwirkungsenergie im el. Feld: $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \varrho(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r})\, \mathrm{d}V$ ($\varphi$ des Felderzeugers, $\varrho$ der Probe)
- Kraft: $\vec{K} = \iiint \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r$
- Drehmoment um Koordinatenursprung: $\vec{M} = \iiint \vec{r} \times \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r$

**Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung um $\vec{r} = 0$ für weit entfernten Betrachter**

- Potential: $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \sum\limits_{i,j} \frac{Q_{ij}\cdot x_i x_j}{r^5}$ (bei Abbruch nach der $1/r^3$-Ordnung)
- Kraft: $\vec{K} = q \cdot \vec{E}(\vec{r} = 0) + (\vec{p} \cdot \operatorname{grad}_r)\, \vec{E}\Big|_{\vec{r}=0} + \sum\limits_{i,j} q_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \vec{E}\Big|_{\vec{r}=0}$ ($\vec{E}$ ändere sich über $\varrho$ nur langsam)
- Drehmoment: $\vec{M} = p \times \vec{E}(\vec{r} = 0) + 2 \cdot \sum\limits_{i,j} \vec{e}_i \cdot q_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \times \vec{E}\Big|_{\vec{r}=0}$
- Gesamtladung $q$ wie üblich, Dipol- und Quadrupolmoment wie oben über Ladungsverteilung definiert

# Stromfaden

*Situation:* Entlang eines geschlossenen Weges $\varphi$ (umschließend die Fläche $S$) fließt ein Strom $I$, welcher in allen Querschnitten des Leiters tangential zur Bewegungsrichtung gleich ist.

- Potential: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \cdot \oint_\varphi \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{I}{c} \cdot \iint_S \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
- magnetisches Feld: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \cdot \oint_\varphi \frac{\mathrm{d}\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$
- magnetischer Fluss im Faden $\alpha$ durch Feld anderer Fäden: $\Phi_\alpha = c \cdot \sum\limits_\beta I_\beta \cdot L_{\alpha\beta}$ mit $\beta \neq \alpha$
- Wechselwirkung mehrerer Stromfäden: $W_\mathrm{magn} = \sum\limits_{\alpha\neq\beta} \frac{I_\alpha \cdot I_\beta}{2} \cdot L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2c} \cdot \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha \cdot I_\alpha$
- Induktionskoeffizienten: $L_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} \cdot \oint_{\varphi_\alpha} \oint_{\varphi_\beta} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_\alpha \cdot \mathrm{d}\vec{r}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$
- Kraft durch den Faden $\alpha$ auf $\beta$: $\vec{K}_{\beta\leftarrow\alpha} = \frac{I_\alpha \cdot I_\beta}{c^2} \cdot \oint_{\varphi_1} \oint_{\varphi_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_\beta \times [\mathrm{d}\vec{r}_\alpha \times (\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha)]}{|\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha|^3} = -\frac{I_\alpha \cdot I_\beta}{c^2} \cdot \oint_{\varphi_1} \oint_{\varphi_2} \frac{\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha}{|\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha|^3} \, \mathrm{d}\vec{r}_\alpha \, \mathrm{d}\vec{r}_\beta$

# Magnetischer Dipol

*Situation:* Stromfaden wie oben am Ort $\vec{r}_m$; Übergang zu $S \to 0$ und $I \to \infty$ derart, dass das magnetische Moment $\vec{m} = \frac{I}{c} \cdot \iint_S \mathrm{d}\vec{f}$ konstant bleibt

- Potential: $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_m|} = \vec{m} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}_m}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$
- magnetisches Feld: $\vec{B}(\vec{r}) = 3 \cdot \frac{[(\vec{r}-\vec{r}_m)\cdot\vec{m}]\cdot(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$
- mehrere Dipole $\to$ Dipoldichte: $\vec{M}(\vec{r}) = \sum\limits_\alpha \vec{m}_\alpha \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$
- Gesamtdipolmoment: $\vec{m} = \iiint \mathrm{d}^3 r \cdot \vec{M}(\vec{r}) = \sum\limits_\alpha \vec{m}_\alpha$
- Potential einer Dipolverteilung: $\vec{A}(\vec{r}) = -\iiint \mathrm{d}^3 r' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \times \mathrm{grad}_r \frac{1}{\vec{r}-\vec{r}'}$
- Stromdichte einer Dipolverteilung: $\vec{j}(\vec{r}) = c \cdot \mathrm{rot}\, \vec{M}(\vec{r}) = c \cdot \sum\limits_\alpha \vec{m}_\alpha \times \mathrm{grad}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$
- Wechselw.energie einer Dipolv.: $W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{\alpha\neq\beta} \vec{m}_\alpha \cdot \vec{B}_\beta(\vec{r}_\alpha) = \sum\limits_{\alpha\neq\beta} \frac{1}{2\cdot r_{\alpha\beta}^3} \cdot \left[3 \cdot \frac{(\vec{r}_{\alpha\beta}\cdot\vec{m}_\alpha)\cdot(\vec{r}_{\alpha\beta}\cdot\vec{m}_\beta)}{r_{\alpha\beta}^2} - \vec{m}_\alpha \cdot \vec{m}_\beta\right]$

# Allgemeine ruhende Stromverteilung

- Potential: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \cdot \iiint \mathrm{d}^3 r' \cdot \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{A}_\mathrm{hom}(\vec{r})$
- magnetisches Feld: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \cdot \iiint \mathrm{d}^3 r' \cdot \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \vec{B}_\mathrm{hom}(\vec{r})$
- Wechselwirkungsenergie im magn. Feld: $W_\mathrm{magn} = \frac{1}{2c} \cdot \iiint_V \vec{\jmath}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \, \mathrm{d}V$ ($\vec{A}$ des Felderzeugers, $\vec{\jmath}$ der Probe)
- Kraft: $\vec{K} = \iiint \vec{\jmath}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r$
- Drehmoment um Koordinatenursprung: $\vec{M} = \iiint \vec{r} \times \left[\vec{\jmath}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right] \, \mathrm{d}^3 r$

**Multipolentwicklung einer Stromverteilung um $\vec{r} = 0$ für weit entfernten Betrachter**

- Dipolmoment der Stromverteilung: $\vec{m} = \frac{1}{2c} \cdot \iiint_V \mathrm{d}^3 r' \cdot \left[\vec{r}' \times \vec{\jmath}(\vec{r}')\right]$
- Potential: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$ (bei Abbruch nach der $1/r^3$-Ordnung)
- magnetisches Feld: $\vec{B}(\vec{r}) = 3 \cdot \frac{(\vec{r}\cdot\vec{m})\cdot\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$
- Kraft: $\vec{K} = \mathrm{grad} \left[\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{m}\right]_{\vec{r}=0}$
- Drehmoment um Koordinatenursprung: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r} = 0)$

# Operatoren

- Viererdivergenz-Operator: $\partial_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}$ und $\partial^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_\mu}$
- D'Alembert-Operator: $\Box = \partial^\nu \partial_\nu = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \Delta$

# Grundgrößen und -gleichungen

| | **Kontravariante Größe** | **Kovariante Größe** |
|---|---|---|
| Vierervektor der Stromdichte | $J^\mu = (c \cdot \varrho, \vec{\jmath})$ | $J_\mu = (c \cdot \varrho, -\vec{\jmath})$ |
| Viererpotential | $\Phi^\mu = (\varphi, \vec{A})$ | $\Phi_\mu = (\varphi, -\vec{A})$ |
| Feldstärketensor | $F^{\nu\mu} = \partial^\mu \Phi^\nu - \partial^\nu \Phi^\mu$ | $F_{\nu\mu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$ |

- Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu J^\mu = 0$
- Bestimmungsgleichung für das Potential: $\Box \Phi^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$
- homogene Maxwellgleichungen: $\partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} = 0$
- inhomogene Maxwellgleichungen: $\partial_\mu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$

# Relativistische Mechanik

| | **Kontravariante Größe** | **Kovariante Größe** |
|---|---|---|
| Viererkraftdichte | $f^\mu = \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{k}, \vec{k}\right)$ | $f_\mu = \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{k}, -\vec{k}\right)$ |
| Viererkraft | $F^\mu = \gamma \cdot \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{K}, \vec{K}\right)$ | $F^\mu = \gamma \cdot \left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{K}, -\vec{K}\right)$ |
| Energie-Impuls-Tensor | $T^{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(g_{\lambda\sigma} \cdot F^{\sigma\nu} \cdot F^{\lambda\mu} - \frac{1}{4} \cdot g^{\mu\nu} \cdot F_{\lambda\sigma} \cdot F^{\lambda\sigma}\right)$ | |

- Bewegungsgleichung: $m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu$ mit Eigenzeit $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$ und Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \gamma \cdot (c, \vec{v})$
- Viererkraftdichte: $f^\nu = \frac{1}{c} \cdot J_\mu \cdot F^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\nu\mu}$ (liefert Energiebilanz für $\nu = 0$)

# Transformation von Feldern

Das Bezugssystem $\Sigma'$ bewege sich gegen das Bezugssystem $\Sigma$ mit $\vec{v}$.

- Transformation von Feldkomponenten parallel zu $\vec{v}$: $\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel$ und $\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$
- Transformation von Feldkomponenten senkrecht zu $\vec{v}$: $\vec{E}'_\perp = \gamma \cdot \left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$ und $\vec{B}'_\perp = \gamma \cdot \left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right)$

# Matrixdarstellungen

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -w & -\frac{1}{c} \cdot S_x & -\frac{1}{c} \cdot S_y & -\frac{1}{c} \cdot S_z \\ -\frac{1}{c} \cdot S_x & T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ -\frac{1}{c} \cdot S_y & T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ -\frac{1}{c} \cdot S_z & T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -w & \frac{1}{c} \cdot S_x & \frac{1}{c} \cdot S_y & \frac{1}{c} \cdot S_z \\ \frac{1}{c} \cdot S_x & T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ \frac{1}{c} \cdot S_y & T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ \frac{1}{c} \cdot S_z & T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Die Größen in den Matrizen sind alle wie auf den vorhergehenden Seiten.

# Retardierte Potentiale

- skalares Potential: $\varphi(\vec{r},t) = \iiint \mathrm{d}^3r' \, \frac{\varrho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

- Vektorpotential: $\vec{A}(\vec{r},t) = \iiint \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{\jmath}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

# Multipolentwicklung eines Strahlungsfeldes

Gegeben sei eine lokalisierte Strom- und Ladungsverteilung um $\vec{r}=0$ mit weit entferntem Beobachter.

- Skalarpotential: $\varphi(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\left[\frac{1}{r}\cdot\left(\vec{p}(t') + \vec{m}(t')\times\vec{e}_r + \frac{1}{c}\cdot\dot{\overleftrightarrow{q}}(t')\cdot\vec{e}_r\right)\right] + \mathrm{const.}(\vec{r})$

- Vektorpotential: $\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{cr}\cdot\left(\dot{\vec{p}}(t') + \dot{\vec{m}}(t')\times\vec{e}_r + \frac{1}{c}\cdot\ddot{\overleftrightarrow{q}}(t')\cdot\vec{e}_r\right)$ mit $t' = t-\frac{r}{c}$

- magnetisches Feld: $\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2r}\cdot\left[\left(\ddot{\vec{p}}(t')\times\vec{e}_r\right)\times\vec{e}_r + \vec{e}_r\times\ddot{\vec{m}}(t') + \frac{1}{3c}\cdot\left(\dddot{\overleftrightarrow{Q}}(t')\cdot\vec{e}_r\times\vec{e}_r\right)\times\vec{e}_r\right]$

- elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2r}\cdot\left[\ddot{\vec{p}}(t')\times\vec{e}_r + \left(\ddot{\vec{m}}(t')\times\vec{e}_r\right)\times\vec{e}_r + \frac{1}{3c}\cdot\left(\dddot{\overleftrightarrow{Q}}(t')\cdot\vec{e}_r\times\vec{e}_r\right)\right]$

- Zusammenhang zwischen den Feldern: $\vec{E} = \vec{e}_r\times\vec{B}$ und $\vec{B} = \vec{E}\times\vec{e}_r$

# Liénard-Wiechert-Potentiale

Eine Punktladung $q$ bewege sich auf der Bahnkurve $\vec{r}_q(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_q(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_q(t)$. Es werden die Abkürzungen $\vec{R}(t) = \vec{r}-\vec{r}_q(t)$ und $t' = t-\frac{\left|\vec{R}(t')\right|}{c}$ verwendet.

- Potentiale: $\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{\left|\vec{R}(t')\right| - \frac{1}{c}\cdot\vec{R}(t')\cdot\vec{v}_q(t')}$ und $\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\cdot\vec{v}_q(t')}{c\cdot\left|\vec{R}(t')\right| - \vec{R}(t')\cdot\vec{v}_q(t')}$

- Felder: $\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{R}(t')}{\left|\vec{R}(t')\right|}\times\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{E}(\vec{r},t) = q\cdot\left[\left|\vec{R}(t')\right| - \frac{\vec{v}_q(t')}{c}\cdot\vec{R}(t')\right]^{-3}\cdot$
$\cdot\left[\left(1-\frac{\vec{v}_q(t')^2}{c^2}\right)\cdot\left(\vec{R}(t') - \frac{\vec{v}_q(t')\cdot\left|\vec{R}(t')\right|}{c}\right) + \frac{1}{c^2}\cdot\vec{R}(t')\times\left[\left(\vec{R}(t') - \frac{\vec{v}_q(t')\cdot\left|\vec{R}(t')\right|}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}_q(t')\right]\right]$

# Materialgrößen

- Polarisation: $\vec{P} = \overleftrightarrow{\chi}_e \cdot \vec{E}$ mit elektrischer Suszeptibilität $\overleftrightarrow{\chi}_e$
- dielektrische Verschiebung: $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}$ mit Dielektrizitätskonstante $\overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{1} + 4\pi \cdot \overleftrightarrow{\chi}_e$
- Magnetisierung: $\vec{M} = \overleftrightarrow{\chi}_m \cdot \vec{H}$ mit magnetischer Suszeptibilität $\overleftrightarrow{\chi}_m$
- Magnetfeld: $\vec{H}$ mit $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \cdot \vec{M} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{H}$ mit Permeabilität $\overleftrightarrow{\mu} = \overleftrightarrow{1} + 4\pi \cdot \overleftrightarrow{\chi}_m$
- Leitfähigkeit: $\overleftrightarrow{\sigma}$ mit $\vec{\jmath} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}$ (nicht für Supraleiter)

# Maxwellgleichungen in Materie

| | |
|---|---|
| $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | Faradaysches Induktionsgesetz |
| $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \cdot \varrho$ | Gaußsches Durchflutungsgesetz |
| $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{\jmath}$ | Durchflutungsgesetz von Oersted und Ampère |
| $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ | Ausschluss magnetischer Monopole |

# Wichtige Folgerungen

- Dispersionsrelation für Wellen: $\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \cdot |\vec{k}|$
- Feld eines Permanentmagneten: $\vec{H} = -\operatorname{grad} \phi$ mit $\phi = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r' \frac{\operatorname{div} \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \oiint_{S(V)} \mathrm{d}\vec{f}\,' \cdot \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\operatorname{div} \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$
- Energiebilanz: $\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}(w_{\mathrm{el}} + w_{\mathrm{magn}}) = -\sigma \cdot \vec{E}^2$

  Hierbei sind
- $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot \vec{E} \times \vec{H}$ der Poynting-Vektor
- $w_{\mathrm{el}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \vec{E}^2$ die elektrische Feldenergie
- $w_{\mathrm{magn}} = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \vec{H}^2$ die magnetische Feldenergie

# Grenzbedingungen

An der Grenzfläche (Flächennormale $\vec{n}$, beliebige Tangente $\vec{t}$) zwischen zwei Materialien gilt:

- $\vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi \cdot \varrho_F$ – Die Normalkomponenten des $\vec{D}$-Feldes sind unstetig.
- $\vec{t} \cdot \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$ – Die Tangentialkomponenten des $\vec{E}$-Feldes sind stetig.
- $\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$ – Die Normalkomponenten des $\vec{B}$-Feldes sind stetig.
- $\vec{t} \cdot \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{\jmath}_F \cdot \vec{t}$ – Die Tangentialkomponenten des $\vec{H}$-Feldes sind unstetig.

Hierbei sind $\varrho_F$ und $\vec{\jmath}_F$ die Flächenladungs- bzw. Flächenstromdichte auf der Oberfläche.

## Bauteilparameter

- Widerstand eines Leiters: $R = \frac{l}{\sigma \cdot A}$ (Länge $l$, Querschnitt $A$)
- elektromotorische Kraft einer Stromquelle: $\varepsilon = \int_-^+ \vec{E}^{(e)}\, \mathrm{d}\vec{r}$ (Integral der eingeprägten Kraft der Quelle)
- Ohmsches Gesetz bei Anwesenheit von Stromquellen: $\vec{\jmath} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}^{(e)}\right)$

## Sätze für Stromkreise

Ein Stromkreisnetzwerk enthalte nur Stromquellen und Widerstände.

- Knotensatz: $\sum I = 0$
- Maschensatz: $\sum R \cdot I = \sum \varepsilon$
- Energiesatz: $\sum R \cdot I^2 = \sum \varepsilon \cdot I$

## Kapazität

- Kapazität eines Leiters: $C = \frac{Q}{\varphi_0}$ ($\varphi_0$ auf der Leiteroberfläche)
- Kapazitätskoeffizienten eines Systems von Leitern: $Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \cdot \varphi_\beta$
- Kapazität eines Kondensators: $C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ ($Q$ auf einem der beiden Leiter, $\varphi_i$ auf den Leiteroberflächen)
- elektrische Energie: $W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} \cdot \varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta$