Theoretische Mechanik

(Kompendium)

Herausgegeben von

Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

Mechanische Größen und wichtige Sätze

- Bahnkurve: $\vec{r}(t)$, Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}$, Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}$, Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
- Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, Impulssatz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F}$, *Erhaltung* bei verschwindender Kraft
- Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, Drehimpulssatz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{M}$, *Erhaltung* bei verschwindendem Drehmoment
  Flächensatz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A} = \frac{|\vec{L}|}{2m}$ ($\vec{A}$ = vom Fahrstrahl $\vec{r}$ überstrichene Fläche)
- Arbeit: $W = \int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$
- Leistung: $P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W = \vec{F} \cdot \vec{v}$
- kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\vec{v}^2$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = P$
- Potential: $U(\vec{r})$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\vec{r}) = -\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \vec{v}$
- Energie: $E \equiv T + U = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$, Energiesatz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = -\vec{F}_{\text{diss}} \cdot \vec{v}$, *Erhaltung* bei rein konservat. Kraft
- konservative Kraft: $\exists\, U(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\operatorname{grad} U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U$; $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$; Arbeit unabhängig vom Weg; Ringintegrale der Arbeit verschwinden
- Virialsatz: $\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\vec{r} \cdot \vec{\nabla}U}$ für konservative $\vec{F}$ und über die gesamte Zeit beschränkte Impulse und Orte
  $\overline{T} = \frac{k}{2}\overline{U}$ für (zusätzlich) ein homogenes Potential vom Grade k, d.h. $U(\alpha \cdot \vec{r}) = \alpha^k \cdot U(\vec{r})$

Planetenbewegung

M sei im Ursprung fixiert und m (Abstand ϱ zum Ursprung) bewege sich unter der Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\gamma\frac{mM}{\varrho^2} \cdot \vec{e_\varrho} = -\gamma\frac{mM}{\varrho^3} \cdot \vec{\varrho}$$

- Potential: $U(\varrho) = -\gamma\frac{mM}{\varrho}$, Energie: $E = \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) \equiv \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + U_{\text{eff}}(\varrho)$ – effektives Potential
- Bahnen des freien Körpers: $\varrho(\varphi) = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ mit $k = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}$ (Parameter) und $\varepsilon = \frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}}$ (Exzentrizität)

Bezugssysteme

- Spezielle Galileitransformation (IS′ bewegt sich gegen IS mit $\vec{v} = v\vec{e_x}$): $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$
- Allgemeine Galileitransformation (IS′ bewegt sich gegen IS mit $\vec{v} = v_i\vec{e_i}$): $x'_i = \alpha_{ij}x_j - v_i t - x_{0i}$, $t' = t - t_0$
  $\alpha = (\alpha_{ij})$ muss eine Drehmatrix sein, also $\alpha^T \cdot \alpha = 1$
- Rotierendes Bezugssystem (KS rotiert mit $\vec{\omega}$ bzgl. IS, Ortsvektor $\vec{r}$ in IS bzw. $\vec{r}'$ in KS)
  - Allgemeine Operatorgleichung: $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{IS}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{KS}} + \vec{\omega}\times$ (anwenden auf $\vec{r} = \vec{r}'$)
  - Zentrifugalkraft: $\vec{F}_z = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, Corioliskraft: $\vec{F}_c = 2m \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$
  - Transformation von Beschleunigungen: $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}_z - \vec{F}_c - m \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$

Systeme freier Massepunkte

Betrachte N Massepunkte der Masse m_i an den Orten $\vec{r_i}$ mit den äußeren Krafteinwirkungen $\vec{F_i}$.

- Gesamtmasse: $M = \sum_i m_i$, Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i\vec{r_i}$, Gesamtimpuls: $\vec{P} = \sum_i \vec{p_i} = M\dot{\vec{R}}$
- Impuls-/Schwerpunktsatz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F_i}$, analog Drehimpuls und Energie
- Zweikörperproblem: keine äußeren Kräfte (nur innere Kräfte $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$): $M\ddot{\vec{R}} = 0$
  reduzierte Masse: $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = m_2 \cdot \frac{1}{1+m_2/m_1} \Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$

D'Alembert-Prinzip

Ein System von N Körpern erfahre eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$, d.h. die Zwangsbedingungen gelten noch, wenn man annimmt, dass sich die Zeit nicht ändert (bei $\mathrm{d}t \neq 0$ wäre es eine reale Verrückung $\mathrm{d}\vec{r_i}$). Dann gilt für die Zwangskräfte:

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r_i} = \left(m\ddot{\vec{r_i}} - \vec{F_i}\right) \cdot \delta\vec{r_i} = 0$$

Lagrange 1. Art

Im folgenden sei N die Anzahl der Teilchen und R die Anzahl der Zwangsbedingungen.

1. Zwangsbedingungen in konstanten Koordinaten angeben

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, R)$$

2. Lagrangegleichungen 1. Art mit konstanten Koordinaten aufschreiben

$$m_n\ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \qquad (n = 1, \ldots, 3N)$$

3.1. Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit ableiten (diese Ableitungen sind ebenfalls Null!); umformen

$$\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\ddot{x}_n = f_\alpha(x, \dot{x}, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, R)$$

3.2. hierin Lagrangegleichungen 1. Art einsetzen

$$\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \frac{1}{m_n}\left(F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\right) = f_\alpha(x, \dot{x}, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, R)$$

3.3. entstehendes lineares Gleichungssystem vom Grade R für die $\lambda_\alpha(x, \dot{x}, t)$ lösen und in die Lagrangegleichungen 1. Art einsetzen

$$m_n\ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \qquad (n = 1, \ldots, 3N)$$

4. Lösung der entstehenden Bewegungsgleichungen $\Rightarrow x(t)$; ggf. Bestimmung der Zwangskräfte

$$Z_n(t) = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}$$

Lagrange 2. Art

Im Folgenden seien f die Anzahl der Freiheitsgrade und $q_1, \ldots, q_f$ die verallgemeinerten Koordinaten, die die Zwangsbedingungen automatisch erfüllen.

1. kinetische Energie und Potential analytisch fassen und Lagrange-Funktion formulieren

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

2. Lagrange-Gleichungen 2. Art lösen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, f)$$

Hamilton-Prinzip der extremalen Wirkung

Der gewählte Weg $q(t)$ ist dadurch gekennzeichnet, dass das Wirkungsintegral extremal wird.

$$\delta \int \mathrm{d}t\mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) = 0$$

Hamilton-Formalismus

1. Lagrangefunktion aufstellen und verallgemeinerte Impulse bilden
$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$
2. verallgemeinerte Impulse nach $\dot{q}_k$ umstellen und mit diesen Hamiltonfunktion bilden
$$H(q,p,t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}$$
3. kanonische Gleichungen aufstellen
$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{und} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \left(\text{sowie } \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \right)$$

- *Spezialfall:* zyklische Koordinate
$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{p}_k = 0 \;\Rightarrow\; p_k = \text{const.}$$

Poisson-Klammern

$$\{F,G\} = \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial G}{\partial q_k} \right]$$

- algebraische Eigenschaften:
  - Linearität: $\{c_1 A + c_2 B, C\} = c_1 \{A,C\} + c_2 \{B,C\}$, ebenso in zweiter Komponente
  - Antisymmetrie: $\{A,B\} = -\{B,A\}$
  - Produktregel: $\{A \cdot B, C\} = A \cdot \{B,C\} + B \cdot \{A,C\}$, ebenso in zweiter Komponente
  - Jacobi-Identität: $\{\{A,B\},C\} + \{\{B,C\},A\} + \{\{C,A\},B\} = 0$
- Zeitableitung einer Funktion $F(q,p,t)$: $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$, insbesondere $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ (dritte kanonische Gleichung)
- fundamentale Relationen verallgemeinerter Größen:
  - untereinander: $\{q_i,q_j\} = 0$, $\{p_i,p_j\} = 0$, $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$
  - mit Funktionen: $\{q_k,G\} = \frac{\partial G}{\partial p_k}$, $\{p_k,G\} = -\frac{\partial G}{\partial q_k}$
  - mit Hamilton-Funktion: $\{q_k,H\} = \dot{q}_k$, $\{p_k,H\} = \dot{p}_k$

Kanonische Transformationen

- *Definition:* Eine Transformation $q,p \to Q,P$ heißt kanonisch, wenn sie die kanonischen Gleichungen unberührt lässt, d.h. es gibt eine zu H gleichwertige Funktion $\widetilde{H}(Q,P,t)$ mit $\dot{Q}_k = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}$ und $\dot{P}_k = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}$.

  Test: Eine Transformation $q,p \to Q,P$ ist genau dann kanonisch, wenn gilt:
$$\{Q_i,Q_j\} = 0\;,\; \{P_i,P_j\} = 0\;,\; \{Q_i,P_j\} = \delta_{ij}$$
- Zu jeder kanonischen Transformation gibt es eine *Erzeugende* G, mit der sich die transformierte Hamiltonfunktion nach $\widetilde{H}(Q,P,t) = H(q(Q,P),p(Q,P),t) + \frac{\partial G}{\partial t}$ folgt. Es gibt vier Typen von Erzeugenden:

Form	$G = G_1(q,Q,t)$	$G = G_2(q,P,t)$	$G = G_3(p,Q,t)$	$G = G_4(p,P,t)$
Eigenschaften	$p = \frac{\partial G_1}{\partial q}$	$p = \frac{\partial G_2}{\partial q}$	$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p}$	$q = -\frac{\partial G_4}{\partial p}$
	$P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q}$	$Q = \frac{\partial G_2}{\partial P}$	$P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q}$	$Q = \frac{\partial G_4}{\partial P}$

- In der Praxis hat man $H(q,p,t)$ sowie die Erzeugende oder die Transformation, findet das jeweils andere mithilfe der obigen Eigenschaften und geht dann zu $\widetilde{H}(Q,P,t)$ über. Die Ergebnisse aus der Betrachtung des werden dann gegebenenfalls rücktransformiert.
- *Satz von Liouville:* Die Phasenraumdichte $\varrho(\vec{r},t)$ entlang einer Trajektorie ist konstant.
$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \{\varrho,H\} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = 0$$

Translation

Der Körper (Gesamtmasse M) wird durch ein Inertialsystem (IS) und ein mitbewegtes Koordinatensystem mit dem Ursprung $\vec{r_0}$ (der sich mit $\vec{v_0}$ bewegt) beschrieben.

- Geschwindigkeit eines Punktes $\vec{r_i}$ ($\vec{r_{0i}}$ im KS) auf dem starren Körper im IS: $\vec{v_i} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_{0i}}$

Im Folgenden sei $\vec{v_0} = 0$ (ortsfester Kreisel) oder $\sum_i m_i \vec{r_{0i}} = 0$ ($\vec{r_0}$ ist der Schwerpunkt).

- kinetische Energie der Translation: $T_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M \vec{v_0}^2$

Rotation

- Komponenten des Trägheitstensors $\widehat{\Theta}$: $\Theta_{mn} = \varrho \iiint \mathrm{d}V \left(\vec{r}^2 \delta_{mn} - r_m r_n\right)$
- Trägheitsmoment bzgl. einer Drehachse $\vec{\omega}$: $\Theta_{\vec{\omega}} = \sum_{m,n} \Theta_{mn} \frac{\omega_m}{\omega} \frac{\omega_n}{\omega}$
- kinetische Energie der Rotation: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \Theta_{mn} \omega_m \omega_n = \frac{1}{2} \Theta_{\vec{\omega}} \vec{\omega}^2$
- Drehimpuls: $\vec{L} = \widehat{\Theta} \vec{\omega}$

Steinerscher Satz

Der Trägheitstensor $\widehat{\Theta}'$ eines Körpers der Masse m an einem Ursprung $\vec{a}$ (vom Schwerpunkt aus gesehen) ergibt sich aus dem Trägheitstensor $\widehat{\Theta}$ im Schwerpunktsystem durch

$$\Theta'_{mn} = \Theta_{mn} + M \left(\vec{a}^2 \delta_{mn} - a_m a_n\right)$$

Hauptachsentransformation des Trägheitstensors

- Die *Hauptträgheitsmomente* sind die Eigenwerte $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ der Matrix des Trägheitstensors.
- Die *Hauptträgheitsachsen* sind die zugehörigen Eigenvektorräume $\{\vec{\omega_1}\}, \{\vec{\omega_2}\}, \{\vec{\omega_3}\}$. Es gilt:

$$\widehat{\Theta} \vec{\omega_i} = \Theta_i \vec{\omega_i}$$

Hauptachsentransformation: Im Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen sind

$$\widehat{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

Eulergleichungen und -winkel

- Eulersche Gleichungen zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{array}{rcrcl} \Theta_1 \dot{\omega}_1 & + & (\Theta_3 - \Theta_2)\, \omega_2 \omega_3 & = & M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 & + & (\Theta_1 - \Theta_3)\, \omega_1 \omega_3 & = & M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 & + & (\Theta_2 - \Theta_1)\, \omega_1 \omega_2 & = & M_3 \end{array}$$

- Eulersche Winkel (Inertialsystem: x, y, z; mitbewegtes Koordinatensystem: x_1, x_2, x_3; K = Schnittlinie der xy- und x_1x_2-Ebene)

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi & = & \sphericalangle(x, K) \\ \psi & = & \sphericalangle(K, x_1) \\ \vartheta & = & \sphericalangle(z, x_3) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcccc} \omega_1 & = & \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi & + & \dot{\vartheta} \cos\psi \\ \omega_2 & = & \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi & - & \dot{\vartheta} \sin\psi \\ \omega_3 & = & \dot{\varphi} \cos\vartheta & + & \dot{\psi} \end{array}\right.$$

Kausalität

- Zwei Ereignisse (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) heißen *gleichzeitig*, wenn bei jedem Ereignis am jeweiligen Ort startende Lichtblitze gleichzeitig im Mittelpunkt der Verbindungslinie zwischen den Orten ankommen.
- (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) haben den (unter Lorentztransformation invarianten) Raumzeit-Abstand

$$s_{12}^2 = [c\,(t_2 - t_1)]^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]$$

  - $s_{12}^2 > 0$ – zeitartiges Intervall – Es gibt ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden. Gleichzeitig können Sie aber nicht stattfinden.
  - $s_{12}^2 = 0$ – lichtartiges Intervall – Die Ereignisse können weder gleichzeitig noch am gleichen Ort stattfinden, unabhängig von der Wahl des Bezugssystems.
  - $s_{12}^2 < 0$ – raumartiges Intervall – Es gibt ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Am gleichen Ort können Sie aber nicht stattfinden.
- Ereignisse können nur dann kausal zusammenhängen, wenn zwischen ihnen ein zeitartiges oder ein lichtartiges Intervall liegt. Nur dann kann man zwischen Vergangenheit und Zukunft unterscheiden.

Allgemeine Lorentztransformation

Für zwei Inertialsysteme IS und IS′ gibt es zwei Transformationstensoren ${L^\beta}_\alpha$ und ${L_\alpha}^\beta$ mit

$$\textbf{Definition:}\quad \begin{cases} (ct', x', y', z')^T &= {L^\beta}_\alpha\,(ct, x, y, z)^T \\ (ct, x, y, z)^T &= {L_\alpha}^\beta\,(ct', x', y', z')^T \end{cases} \qquad \text{mit} \quad g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Eigenschaften:}\quad \begin{cases} {L_\beta}^\alpha \cdot {L^\beta}_\gamma &= \delta^\alpha_\gamma \\ {L_\beta}^\alpha &= g_{\beta\gamma} \cdot g^{\delta\alpha} \cdot {L^\gamma}_\delta \end{cases}$$

Spezielle Lorentz-Transformation

Das Inertialsystem IS′ bewege sich bzgl. dem Inertialsystem IS mit $\vec{V} = V\vec{e_x}$.

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \tfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - Vt) \\ v_x' &= \alpha\,(v_x - V) \\ v_y' &= \alpha v_y\sqrt{1 - \left(\tfrac{V}{c}\right)^2} \\ v_z' &= \alpha v_z\sqrt{1 - \left(\tfrac{V}{c}\right)^2} \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \tfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x &= \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ v_x &= \alpha\left(v_x' + V\right) \\ v_y &= \alpha v_y'\sqrt{1 + \left(\tfrac{V}{c}\right)^2} \\ v_z &= \alpha v_z'\sqrt{1 + \left(\tfrac{V}{c}\right)^2} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \gamma &= \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ \alpha &= \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

- *Zeitdilatation:* Zwei Ereignisse geschehen von IS gesehen am gleichen Ort mit der Zeitdifferenz $\Delta t = t_2 - t_1$. In IS′ beträgt der Zeitunterschied $\Delta t' = \gamma\,(t_2 - t_1) = \gamma\Delta t$.
- *Längenkontraktion:* Ein in IS ruhendes Objekt hat die Länge $L = x_2 - x_1$. In IS′ misst die Länge dieses Objektes $L' = \frac{1}{\gamma}L$. (Die Messung der Endpunkte x_1' und x_2' muss jeweils gleichzeitig erfolgen!)

Vierertensoren

- Viererskalare sind skalare Größen, die lorentzinvariant, also vom Bezugssystem unabhängig, sind.
  - Lichtgeschwindigkeit, Ruhmasse, Eigenzeit τ eines Systems
  - raumzeitlicher Abstand zwischen zwei Punkten und insbesondere eines Punktes vom Referenzereignis

$$x_\alpha x^\alpha = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

  - Wegelement $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x_\alpha}$ auf einer Weltlinie
  - Eigenzeitdifferential $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s/c$, $\mathrm{d}t = \gamma \cdot \mathrm{d}\tau$
- Vierervektoren sind Vektoren mit vier Komponenten, die sich unter der Lorentztransformation verhalten wie Ereignisse.

  Aus einem Vierervektor x^α ergibt sich der entsprechende kovariante Vektor $x_\alpha = g_{\alpha\beta}x^\beta$ und umgekehrt $x^\alpha = g^{\alpha\beta}x_\beta$.
  - Ortsvektoren von Ereignissen $x^\alpha = (ct, x, y, z)^T$ und deren Differentiale
  - Vierergeschwindigkeit $u^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\,(c, \vec{v})$
  - Viererimpuls oder Energie-Impuls-Vektor $p^\alpha = mu^\alpha = \gamma m_0\,(c, \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p_r}\right)$

Relativistische Bewegungsprozesse

- relativistische Masse: $m = \gamma m_0$
- relativistischer Impuls: $\vec{p_r} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$
- relativistische Energie: $E = \gamma m_0 c^2$
- relativistische kinetische Energie: $T = E - m_0 c^2$
- Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \vec{p_r}^{\,2}$
- Stoßprozesse: Summe der Viererimpulse ist invariant